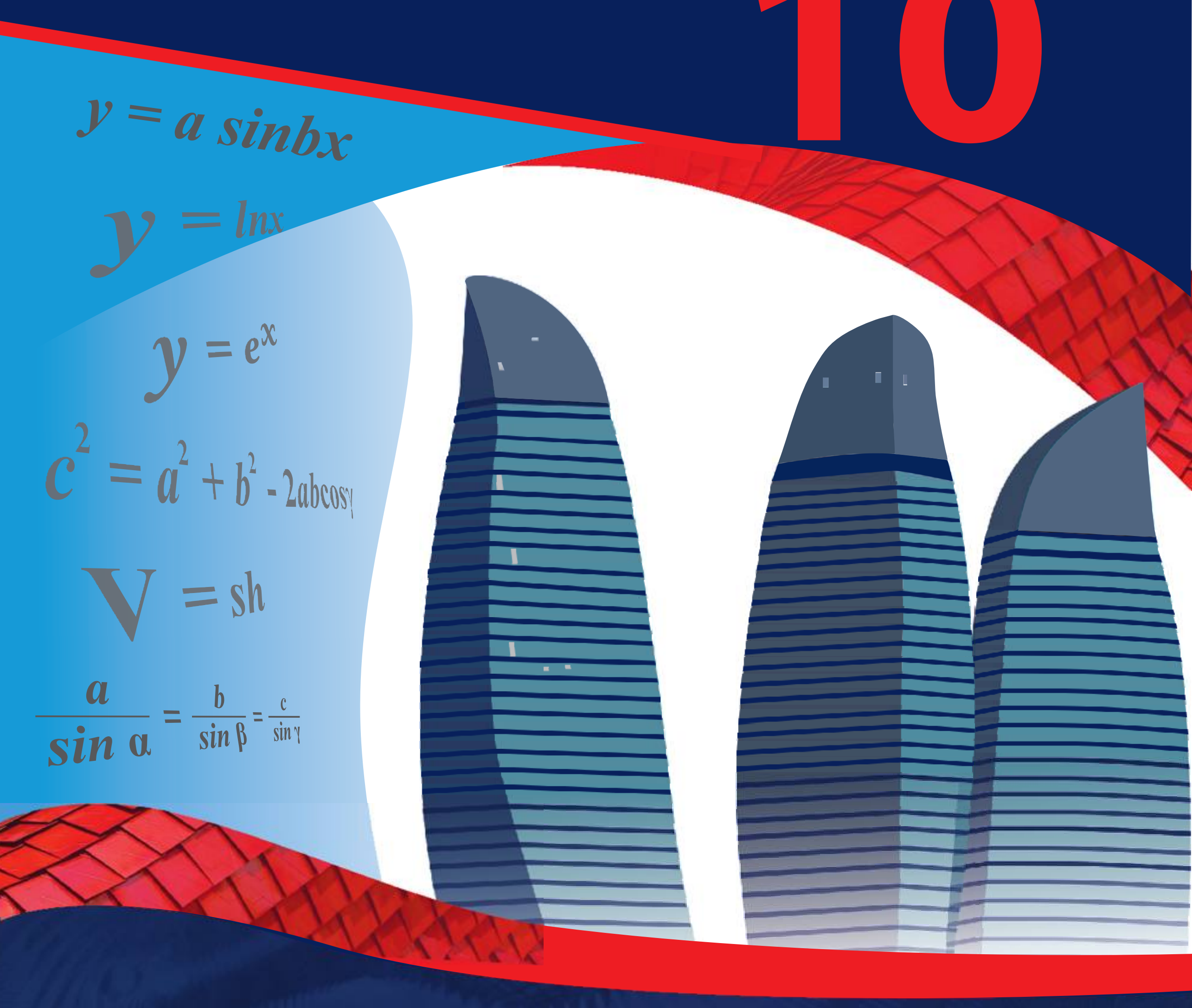
МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

10



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

МАТЕМАТИКА 10

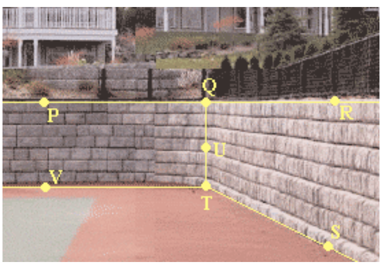
**Учебник по предмету “Математика” для
10 класса общеобразовательных школ**

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!

Radius
Баку-2018

Оглавление

1. Функции



2. Точка, прямая и плоскость в пространстве

3. Тригонометрические функции угла

4. Теоремы синусов и косинусов

5. Тригонометрические функции

6. Многогранники

7. Тригонометрические уравнения

8. Объёмы фигур

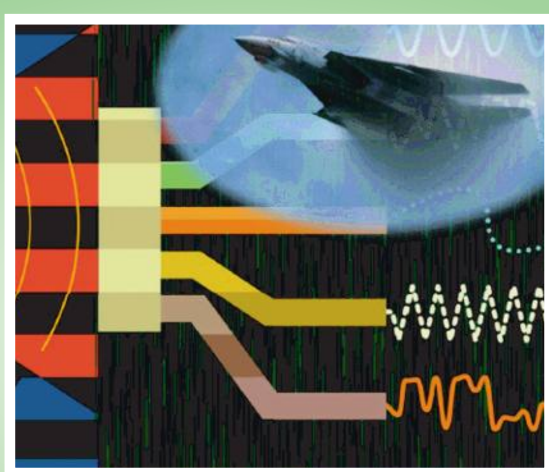
9. Показательная и логарифмическая функции

10. Комплексные числа

11. Информация и прогноз

1 Функция

Функция и способы задания функции
Область определения и множество значений некоторых функций
Свойства функций
Четные и нечётные функции
Кусочно - заданная функция
Степенная функция $y = x^n$ $(n \in N)$
Классификация функций
Преобразование графиков
Действия над функциями
Сложная функция
Обратная функция



Функция и способы задания функции

В различных процессах, которые происходят в природе, можно увидеть, как одни величины изменяются в зависимости от других. Например, путь, пройденный пешеходом, зависит от времени, стоимость покупки зависит от её количества. Путь и время, стоимость и количество, переменные величины. Одна из этих величин независимая, другая изменяется в зависимости от первой. Так, время является независимой переменной, путь – величина, зависимая от времени, количество купленного товара – независимая величина, стоимость покупки зависит от количества. Понятно, что каждая из переменных величин принадлежит какому-то определённому множеству.

Если каждому элементу x из множества X, по определённому правилу ставится в соответствие определённое и единственное значение y из множества Y, то такое соответствие называется функцией.

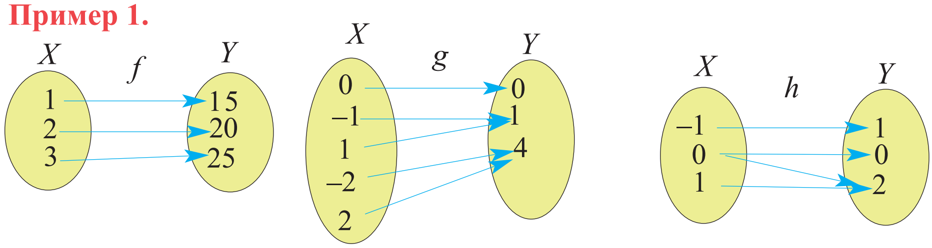
Здесь x называется независимой переменной или аргументом, а y зависимой переменной или функцией. Обычно функцию обозначают так f (или g, φ и т.д.), значения соответствующие заданным значениям аргумента так $f(x)$ (или $g(x)$, $\varphi(x)$ и т.д.): $y = f(x)$

Множество значений, которые может принимать аргумент, называется областью определения и обычно обозначается $D(f)$, множество значений, которая может принимать функция для заданных значений переменной, называется множеством значений функции (областью значений) и обычно обозначается $E(f)$.

Функция может быть задана различными способами: таблицей, парой соответствующих значений, графом зависимости, графиком, формулой и т.д.

Если область определения конечное множество, то зависимость между аргументом и соответствующим значением можно показать стрелками. Такое представление называется **графом зависимости.**

Пример 1.



Здесь каждое из соответствий f и g являются функцией, так как для каждого числа из множества X ставится в соответствие единственное число из множества Y. Соответствие h не является функцией (почему?).

В соответствии с правилом можно написать: $f(1) = 15$, $f(2) = 20$, $f(3) = 25$ и $g(0) = 0$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-2) = 4$, $g(2) = 4$

Эти функции также можно задать **множеством упорядоченных пар** аргументов и соответствующих значений. Для функции f: $\{(1;15),(2;20),(3; 25)\}$, для функции g : $\{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4), (2; 4)\}$

Функция и способы задания функции

Функция может быть задана таблицей. В таблице в одной строке (или в столбце) показаны значения независимой переменной, в другой строке (или в столбце) значения зависимой переменной.

Пример 2.

Урожай пшеницы, собранный с каждого гектара(в тоннах)							
Года	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Урожай, собранный с 1 гектара(в тоннах)	3	4	2	3	5	3	4

Координаты (2009; 3), (2010; 4), (2011; 2), (2012; 3), (20013; 5), (2014; 3), (2015; 4) показывают изменение количества собранного урожая с 1 гектара в зависимости от года.

Область определения (года): {2009; 2010; 2011; 2012; 2013; 2014; 2015}

Множество значений (количество собранного урожая): {2; 3; 4; 5}

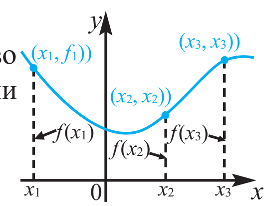
Функция может быть задана аналитически – формулой.

Пример 3. $f(x) = x^2$, $1 \le x \le 3$. Эта запись показывает, что область определения функции отрезок [1; 3], и каждому числу из данного отрезка ставится в соответствие его квадрат.

Например, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(1,2) = 1,2^2 = 1,44$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$ и т.д.

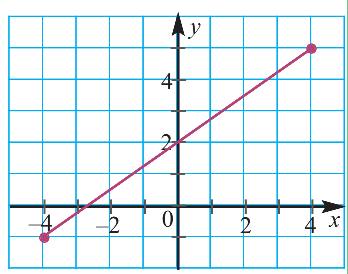
В этом случае запись $f(4)$ не имеет смысла, так как число 4 не принадлежит области определения функции, а именно отрезку [1; 3].

Функция может быть задана графически. Зависимость, между двумя величинами, наиболее удобно изображать геометрически на координатной плоскости. Для каждого значения аргумента $x \in$ D вычисляется соответствующее значение $y = f(x)$. Точки, с координатами $(x; y)$, строятся на координатной плоскости. Множество таких точек образует график функции. График функции это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.



Пример 4. На рисунке на промежутке $-4 \le x \le 4$ графически задана линейная функция $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

Точки, являющиеся концами отрезка, имеют координаты $(-4; f(-4))$, т.е. $(-4; -1)$ и $(4; f(4))$, т.е. $(4; 5)$ и принадлежат графику. На рисунке они закрашены.



Множество значений: [– 1, 5].

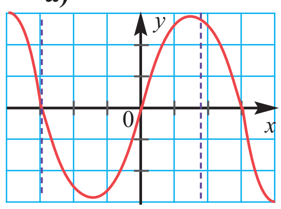
Примечание: если концевые точки кривой графика функции (или отрезка прямой) не отмечены специальными точками, то это показывает, что линия может быть продолжена до бесконечности (обычно изображается стрелками на концах).

Функция и способы задания функции

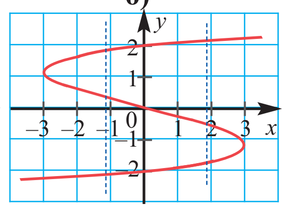
Является или нет зависимость между двумя величинами функцией, можно определить по множеству точек, координаты которых выражены упорядоченными парами, или по графику.

1. По координатам точек. Если среди значений аргумента (первое значение) есть повторяющееся, то зависимость не является функцией. Для множества точек {(1; A), (1; B), (2; C), (3; D)} зависимость не является функцией, зависимость {(1; A), (2; B), (3; C), (4; C), (5; D)} является функцией.

а)



б)

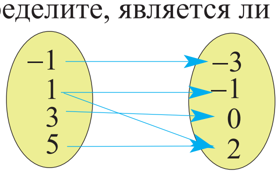


2.По графику. Если любая прямая, проведённая параллельно оси ординат, пересекается с графиком самое большее в одной точке, то эта зависимость является функцией (рис.**а**). Если существует прямая, параллельная оси ординат, которая пересекает график в двух (или более точках)(рис.**б**), то эта зависимость не является функцией. Это указывает на то, что одним и тем же значениям аргумента (x) соответствует несколько значений функции, что противоречит определению функции.

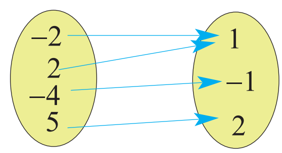
Обучающие задания

1. Определите, является ли соответствие функцией.

а)



б)



2. Определите, является или нет зависимость, заданная множеством точек функцией.

а) {(–5; 1), (–3; 2), (–1; 3), (1; 2)}   б) {(0; 4), (3; 5), (5; –2), (0; 1)}

3. Какая зависимость, заданная таблицей является функцией?

а)

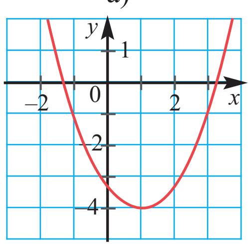
x	3	0	0	–1	–3
y	–4	–3	–1	–2	0

б)

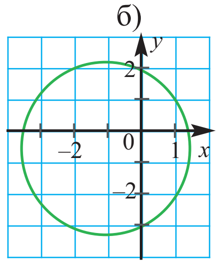
x	7	6	5	4	3
y	–1	2	–1	2	3

4. Установите, является ли зависимость графиком функции, проведя вертикальные прямые.

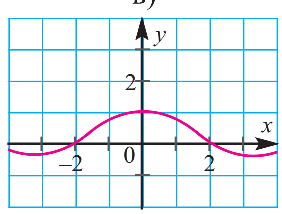
а)



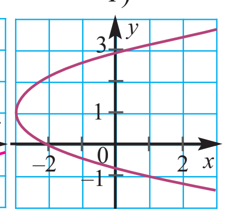
б)



в)



г)



Функция и способы задания функции

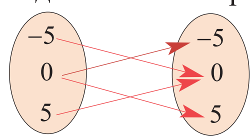
5. Какую из указанных зависимостей можно назвать функцией?
а) зависимость между заработной платой Рамиза за неделю и прибылью от продажи, если он получает постоянную зарплату в размере 50 манат за неделю и дополнительно 2% от продажи.
б) зависимость между временем и расстоянием, пройденным Асмер со скоростью 5 км/ч.
в) зависимость между очками, набранными в компьютерной игре и возрастом ребёнка.

6. Вычислите значение y при $x = 0$ и $x = -3$. Определите какая зависимость является функцией.

а) $y = 5 - 2x$ б) $y = x^2 - 3$ в) $y^2 + x^2 = 25$

7. Представьте каждую из зависимостей в виде схемы по образцу. Какая зависимость не является функцией?

Пример. $\{(-5; 0), (0; -5), (5; 0), (0; 5)\}$



а) $\{(-5; 0), (0; -5), (5; 0), (0; 5)\}$ б) $\{(-2; -2), (-1; -2), (0; 0), (1; 2), (2;2)\}$
в) $\{(-5; 4), (3; 6), (1; 0), (-3; 2)\}$ г) $\{(1 ; 3), (0; 0), (-4; -2), (2; 3), (1 ; -1)\}$

8. Дана функция $f(x) = 1 - 2x$. Найдите $f(-2), f(0), f(0{,}5), f(a + 1)$

9. Для функции $g(x) = 4x^3 - x$ вычислите сумму $g(2) + g(-2)$.

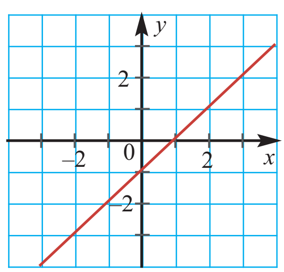
10. При каких значениях аргумента значение функции $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$ равно:

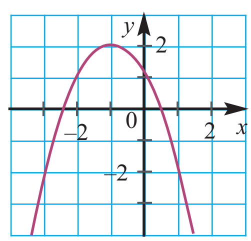
а) 1; б) 0; в) –2 ?

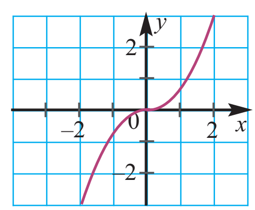
11. Для функции $f(x) = x^2 - 2x + q$ найдите $f(-1)$, если $f(0) = -3$.

12. Функция задана аналитически и графически. Для каждого отдельного случая найдите $f(0), f(1{,}5), f(-1)$.

а) $f(x) = 5x - 2$ б) $f(x) = -x^2 + x$ в) $f(x) = -2x^3 + 1$

г)


д)


е)


13. Постройте график функции на заданной области определения. На графике покажите область определения и множество значений функции.

а) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2, \ -6 \le x < 2$ б) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1, \ (-\infty; 3]$

в) $f(x) = -x - 2, \quad x > -3$ г) $f(x) = 2x + 1, \ (-3; 2]$

Функция и способы задания функции

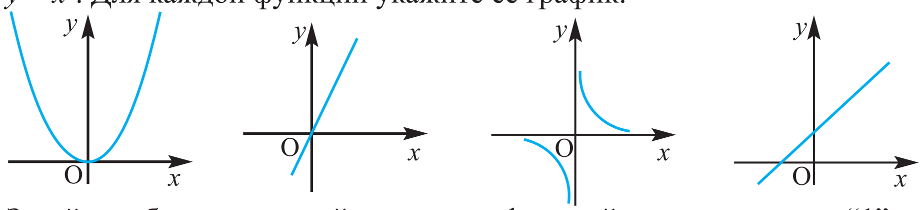
14. График функции $y = 2x + b$ проходит через точку A(1; –1). Найдите b и постройте график функции.

15. При каком значении c график функции $f(x) = x^2 + x + c$ проходит через точку A(–1; 2) ?

16. Точка N(–1; 1) расположена на графике функции $f(x) = x^3 + mx$. Найдите $f(2)$.

17. Постройте графики заданных функций и покажите точки пересечения с осями координат. а) $y = \frac{1}{2}x - 1$ б) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

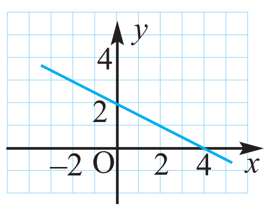
18. На рисунке представлены графики функций $y = 2x$, $y = 2 + x$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2$. Для каждой функции укажите ее график.



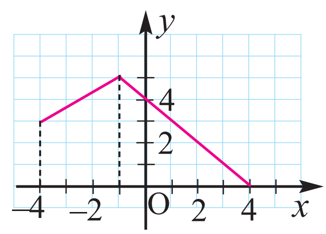
19. Задайте таблицу значений указанных функций с шагом равным “1” и постройте график. Укажите множество значений функций.

а) $y = \frac{x+6}{x}$, $1 \le x \le 6$ б) $y = x^2 - 2|x|$, $-4 \le x \le 4$

20. По графику линейной функции задайте формулу зависимости вида $f(x) = kx + b$ и найдите $f(-2)$, $f(6)$.



21. По графику функции $f(x)$ найдите:
а) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$
б) значения x, удовлетворяющие равенству $f(x) = 1$; $f(x) = 3$



22. Задайте формулой функцию, соответствующую следующей ситуации. Найдите область определения функции, в соответствии с данной ситуацией, и постройте график. По графику найдите область значений функции.

1) Дилара в течении 40 минут совершала пробежку, пробегая 1 км за каждые 10 минут.

2) Печать одной фотографии стоит 25 гяпик. Стоимость печати n фотографий.

3) Свеча, высотой 20 см горела 6 часов, уменьшаясь каждые 2 часа на 5 см.

4) Количество подков для n лошадей.

5) Цена одного литра бензина 90 гяпик. Объём бака автомобиля 40 литров.

Область определения и множество значений некоторых функций

Если для функции, заданной аналитически, область определения не указана, то под областью определения функции подразумеваются такие значения аргумента, при которых формула, при помощи которой задана функция, имеет смысл (такие значения x называются естественной областью определения функции). В этом случае необходимо выяснить, какие значения не может принимать аргумент.

Найдём область определения некоторых функций, заданных в алгебраической форме.

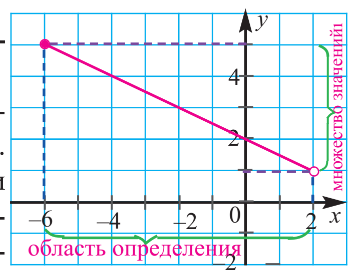
1. Если функция от независимой переменной **задана в виде многочлена**, то область определения такой функции множество всех действительных чисел. Например, область определения функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ является: $(-\infty; +\infty)$.

2. В рациональной функции значение выражения, стоящего в знаменателе не может равняться нулю. Например, для рациональной функции $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ значения аргумента, которые удовлетворяют условию $x^2 - 4 = 0$, не входят в область определения функции. Это значения $x = -2$ и $x = 2$, т.е. функция $g(x)$ определена на множестве $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

3. Подкоренное выражение **функции, содержащей квадратный корень** не может принимать отрицательных значений. Исследуем это на двух примерах:

1. Область определения функции $y=\sqrt{2x-6}$ все значения x удовлетворяющие условию $2x - 6 \geq 0$, $x \geq 3$, т.е.промежуток $[3; +\infty)$. С другой стороны, если $2x - 6 \geq 0$, то $\sqrt{2x-6} \geq 0$, т.е. $y \geq 0$. А это значит, что область значений функции $y = \sqrt{2x-6}$ промежуток $[0; +\infty)$.

2) Найдём область определения и множество значений функции $y = \sqrt{4-x^2}$. По определению квадратного корня $4 - x^2 \geq 0$. Решением данного неравенства является отрезок $[-2; 2]$. Значит функция определена на отрезке $[-2; 2]$. Для любого x из области определения $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$. Отсюда $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4}$, т.е. $0 \leq y \leq 2$. Другими словами, множеством значений является отрезок $[0; 2]$.



4. Нахождение области определения и множества значений функции по графику.

На рисунке представлен график линейной функции $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ на определённом промежутке. По графику, запишем область определения и множество значений функции в виде неравенства. Определим, принадлежат ли абсциссы граничных точек области определения, а ординаты множеству значений в соответствии с видом граничной точки (закрашенный кружочек или нет). Так как кружочек граничной точки (2; 1) не закрашен, то это говорит о том, что $x = 2$ не принадлежит области определения и $y = 1$ не принадлежит области значений. Область определения: $-6 \leq x < 2$, а множество значений: $1 < y \leq 5$

Обучающие задания

1. Найдите (если это возможно) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Обоснуйте ответ, если соответствующее значение найти невозможно.

а) $f(x) = 4 - 2x$ б) $f(x) = 4 - \sqrt{x-2}$ в) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

г) $f(x) = (x-2)(x+3)$ д) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ е) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}$

2. Найдите область определения и множество значений каждой функции.

а) $f(x) = x^2$ б) $f(x) = |x|$ в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ г) $f(x) = x^3$ д) $f(x) = \sqrt{x}$

3. Найдите область определения функции.

а) $y = 3x + 2$ б) $y = 4x - x^2$ в) $y = \sqrt{3-x}$

г) $y = \dfrac{x-2}{x^2}$ д) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ е) $y = \dfrac{x-3}{x^2 - x - 2}$

ж) $y = \sqrt{1-x^2}$ з) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ и) $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-4}$

4. Найдите область определения и множество значений функции.

а) $f(x) = 2x - 3$ б) $g(x) = -3(x+1)^2 + 6$ в) $h(x) = \sqrt{2-x}$

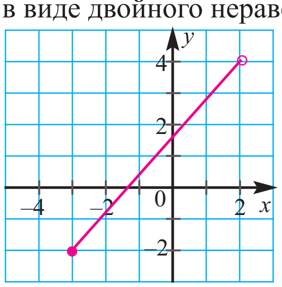
г) $\varphi(x) = \sqrt{x^2+9}$ д) $u(x) = \sqrt{9-x^2}$ е) $v(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

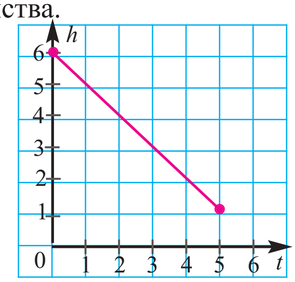
5. Найдите область определения функции.

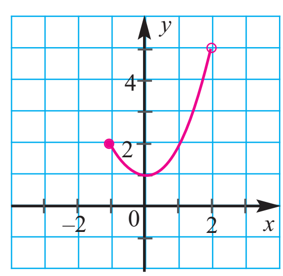
а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-x^2}{x-1}}$ в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{x-1}}$

6. График функции $y = \sqrt{x^2 - mx + 8}$ проходит через точку $M(2; 2)$. Найдите наименьшее значение и множество значений функции.

7. Задайте формулой функции, изображённые на рисунке. На графике укажите область определения и множество значений функций и запишите их в виде двойного неравенства.







8. **Вопрос открытого типа.** Запишите функцию, областью определения которой является множество:

а) всех действительных чисел;

б) всех действительных чисел, кроме 2;

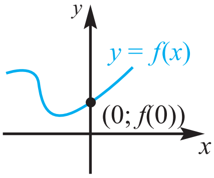
в) всех действительных чисел не меньше 4;

г) всех действительных чисел не больше 3.

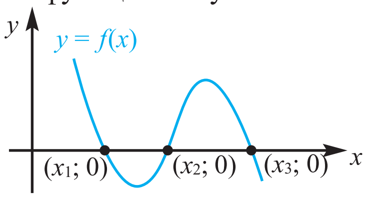
Свойства функций

Самым удобным способом изучения свойств функции является графический способ.

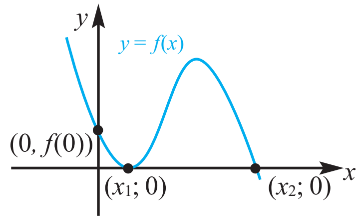
Нули функции. Определив по графику абсциссы точек можно установить область определения функции. В точках пересечения графика функции с осью абсцисс $f(x)=0$. Поэтому абсциссы этих точек называются **нулями функции.** Нулями функции называются значения аргумента, которые превращают функцию в нуль.



Нулей нет

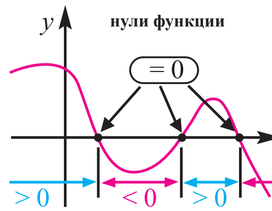


Три нуля x_1, x_2, x_3,

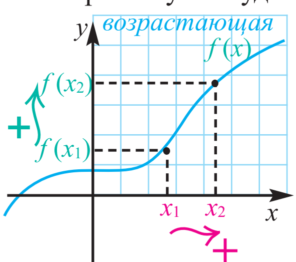


Два нуля x_1, x_2

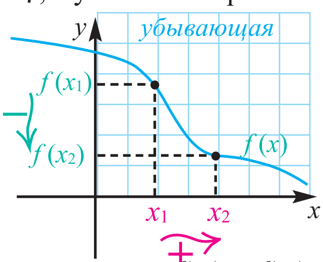
Нулями функции $f(x)$ являются корни уравнения $f(x)=0$. Нули функции разбивают область определения на несколько промежутков, в каждом из которых функция, сохраняет свой знак, принимая положительные или отрицательные значения. На графике, изображённом на рисунке схематично, представлены промежутки знакопостоянства функции.



Возрастание и убывание функции. Если для любых значений x_1, x_2 на области определения функции из $x_2 > x_1$ следует , что $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то этот промежуток называется ***промежутком возрастания f(x)***, если же $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то промежуток называется ***промежутком убывания f(x)***. Возрастание функции на промежутке будем показывать стрелкой ↑, а убывание стрелкой ↘ .



$x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$



$x_2 > x_1$ $f(x_2) < f(x_1)$

Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на каком то промежутке, то функция $–f(x)$ на этом же промежутке убывает (возрастает).

Например, функция $f(x) = x^2$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$, а функция $g(x) = –x^2$ на этом же промежутке убывает.

Если знакопостоянная функция $f(x)$ возрастает (убывает) на каком - то промежутке, то функция $\frac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на этом же промежутке.

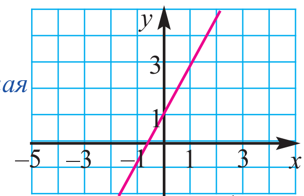
Свойства функций

Например, функция $f(x) = x^2 + 4$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, а $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ убывает на этом же промежутке.

По знаку углового коэффициента можно определить возрастает или убывает линейная функция.

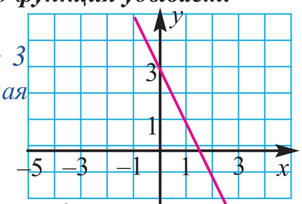
Если угловой коэффициент положителен, то функция возрастает.

функция
$y = 2x + 1$
возрастающая



Если угловой коэффициент отрицателен, то функция убывает.

функция
$y = –2x + 3$
убывающая



Покажем аналитически, что функция $f(x) = kx + b$ при $k > 0$ на всей числовой оси возрастающая, а при $k < 0$ - убывающая.

Возьмём из промежутка $(–\infty; +\infty)$ аргументы, удовлетворяющие условию $x_2 > x_1$ и найдём разность $f(x_2) – f(x_1)$:

$$f(x_2) – f(x_1) = (kx_2 + b) – (kx_1 + b) = k \cdot (x_2 – x_1).$$

По условию, при $x_2 > x_1$ разность $f(x_2) – f(x_1)$ имеет одинаковый знак со знаком k, Таким образом при $k > 0$ $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция возрастающая, при $k < 0$ $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. функция убывающая.

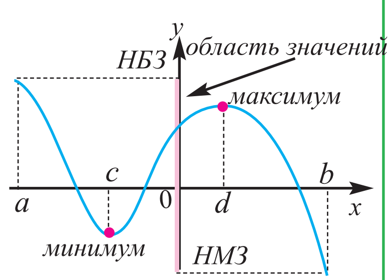
Функции, возрастающие или убывающие на данном промежутке, называются **монотонными** на этом промежутке. Точки, в которых происходит переход от убывания к возрастанию или от возрастания к убыванию, являются точками максимума или минимума. Любой интервал, содержащий точку x_0 называется **окрестностью точки.**

Если для любых точек x $(x \neq x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется **точкой минимума** функции, а $f(x_0)$ называется **минимальным значением функции.**

Если для любых точек x $(x \neq x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие $f(x) < f(x_0)$, то точка x_0 называется **точкой максимума** функции, а $f(x_0)$ **максимальным значением функции.**

Точки максимума и минимума обозначаются как x_{max}, x_{min} и называются точками экстремума, а значения функции в этих точках экстремумами функции.

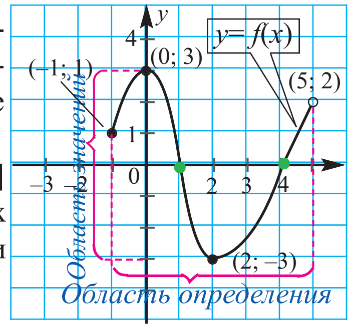
Функция в точке $x = c$ имеет минимум, в точке $x = d$ имеет максимум и это записывается так: $x_{min} = c$, $f_{min} = f(c)$, $x_{max} = d$, $f_{max} = f(d)$.



Среди всех значений функции на области определения наибольшее обозначается НБЗ, а наименьшее НМЗ (если они есть). Если функция непрерывна на заданном отрезке (график сплошная линия), то она принимает все значения между НБЗ и НМЗ.

Свойства функции

Пример. Перечислите все свойства функции на графике.



Решение: 1. Область определения функции промежуток [–1; 5). Если $x = -1$, то $f(-1) = 1$ (соответствующая точка закрашена). Точка (5; 2) не принадлежит графику (она выколота).
Множество значений функции промежуток [–3;3]
2. Нули функции. График пересекает ось x в точках с абсциссами: $x = 1$ и $x = 4$. То есть, значения $x = 1$ и $x = 4$ являются нулями функции: $f(1) = 0$, $f(4) = 0$.

Нули функции разбивают область определения функции на три промежутка знакопостоянства: [–1; 1), (1; 4) и (4; 5).
На промежутке (1; 4) функция принимает отрицательные значения, в каждом из промежутков [–1; 1) и (4; 5) положительные значения.
3. Возрастание и убывание функции. По графику видно, что при увеличении значений x от –1 до 0, значения y увеличивается от 1 до 3, а при увеличении значений x от 0 до 2, значения y уменьшаются от 3 до –3, при увеличении x от 2 до 5, y увеличивается от –3 до 2. Функция на каждом из промежутков [–1; 0] и [2; 5) возрастает, а на промежутке [0; 2] убывает.
4. Экстремумы функции - максимумы и минимумы. Точки (0; 3) и (2; –3) на графике являются точками экстремума. Соответственно эти точки показывают максимум и минимум функции: $x_{max} = 0$, $f_{max} = 3$, $x_{min} = 2$, $f_{min} = -3$.

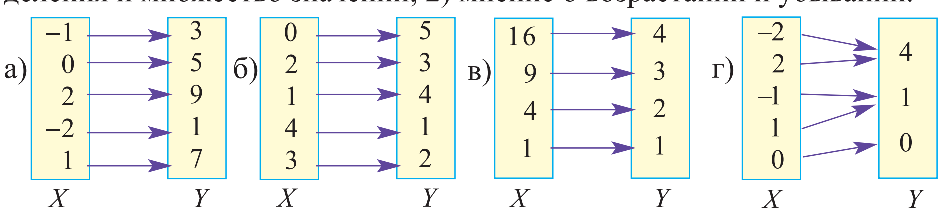
Обучающие задания

1. Найдите нули функции.
а) $y = \frac{1}{5}x - 4$ б) $y = 2x(x - 3)$ в) $y = \sqrt{x} - 2$ г) $y = \sqrt{x - 2}$

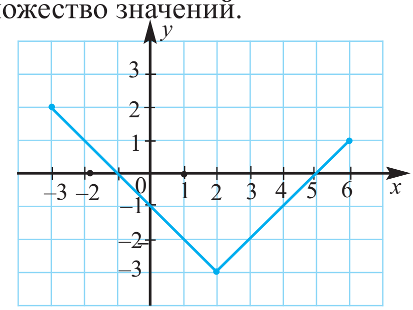
2. Постройте график некоторой функции с нулями в точках:
а) –1; 3 б) –2; 1; 4

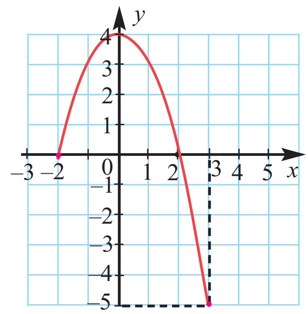
3. а) Изобразите график возрастающей функции с областью определения [1; 4].
б) Изобразите график убывающей функции с областью определения [1; 4]

4. Для функции заданной графом зависимости запишите: 1) область определения и множество значений; 2) мнение о возрастании и убывании.



5. Для функции заданной графиком укажите:
а) область определения; б) нули;
в) промежутки, где функция принимает положительные значения;
г) промежутки, где функция принимает отрицательные значения;
д) промежутки возрастания и убывания; е) экстремумы;
ж) множество значений.

1) 

2) 

6. Функция $y = f(x)$ определена и убывает на промежутке $(-\infty;+\infty)$. Расположите значения в порядке возрастания:
а) $f(0), f(-4), f(2)$; б) $f(1), f(-1), f(3)$; в) $f(-\sqrt{3}), f(-2), f(\sqrt{2})$

7. В таблице представлен объём продаж фирмами А и В по неделям.
а) Определите увеличивается или уменьшается объём продажи каждой фирмы; б) Для каждой фирмы по таблице постройте график.

Фирма А (в дес. тыс. манат)

Неделя	1	2	3	4
Объём продаж	5	7,1	8,7	12

Фирма В (в дес. тыс. манат)

Неделя	1	2	3	4
Объём продаж	5,6	4,2	3,8	3

8. Постройте график функции, покажите промежутки возрастания (убывания) и найдите НБЗ и НМЗ:
а) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3, \quad -2 \le x \le 4$ б) $f(x) = 3 - x, \quad -1 \le x \le 4$

9. Найдите нули функции и схематично изобразите её график. Запишите промежутки знакопостоянства, возрастания(убывания) и экстремумы функции: а) $y = x^2 - 4$ б) $y = |x| - 1$ в) $y = -x^2+2x+3$

10. Напишите формулу функции $f(x) = kx + b$, график которой проходит через точки A(1; –1) и B(2; 1). Расположите значения $f(-3), f(-4), f(2)$ в порядке возрастания. Определите, при каких значениях аргумента $f(x) \ge f(1)$.

11. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции (если оно существует).
а) $f(x) = 2 + \sqrt{x-4}$ б) $f(x) = 2 - |x - 1|$ в) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

12. Постройте график заданной функции на заданном промежутке. Покажите экстремумы. Найдите наименьшее и наибольшее значение.
а) $y = 2x - x^2$, $[-1; 2]$ б) $y = x^2 + 4x$, $[-2; 1]$

Чётная и нечётная функция

Рассмотрим функцию, область определения которой симметрична относительно точки $x = 0$.

Если для любого x из области определения функции $f(-x) = f(x)$, то $f(x)$ называется чётной функцией.

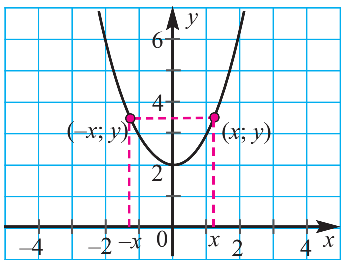


График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Если для любого x из области определения функции $f(-x) = - f(x)$, то $f(x)$ называется нечётной функцией.

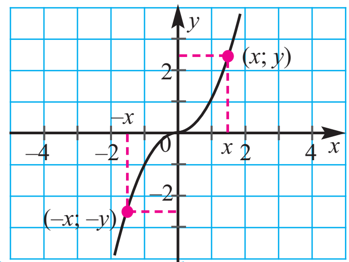


График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Если нечётная функция f(x) определена в точке x = 0, то f(0) = 0.

Вовсе не все функции бывают чётными или нечётными. Если область определения функции не симметрична относительною точки $x = 0$, то функция ни чётная и ни нечётная. Аналогично, если для функции, область определения которой симметрична относительною 0, нарушается выполнение условий $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$, то функция также является ни чётной и ни нечётной.

Пример 1. Выясним чётной или нечётной является функция $f(x) = x^2 + x$

Решение: Областью определения данной функции являются множество всех действительных чисел и оно симметрично относительно точки $x = 0$.

Однако, так как $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, то $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

Значит, функция ни чётная и ни нечётная.

Пример 2. Выясним чётной или нечётной является функция $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2}$

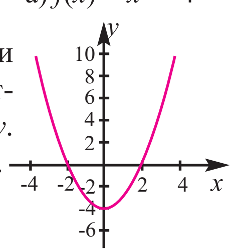
Решение: область определения функции множество всех действительных чисел и $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 2} = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 2} = \dfrac{-(x^3 - x)}{x^2 + 2} = - \dfrac{(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -f(x)$,

т.е. $f(-x) = -f(x)$. Таким образом данная функция нечётная.

Пример 3. По графику выясним чётной или нечётной является функция.

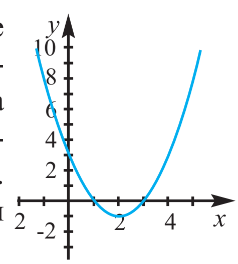
а) $f(x) = x^2 - 4$

График функции симметричен относительно оси y. Функция чётная.



б) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

График функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси y. Функция ни чётная и ни нечётная.



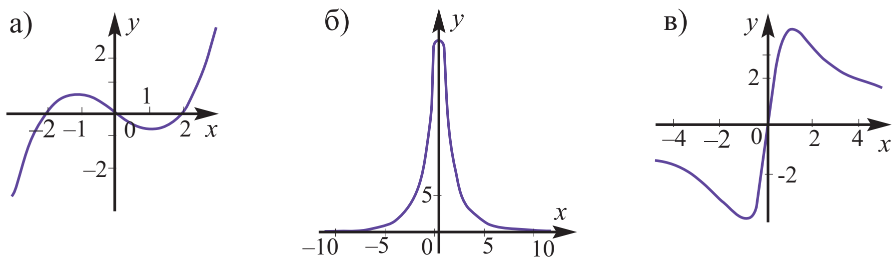
Чётная и нечётная функция

Обучающие задания

1. Выясните чётной или нечётной является функция:

а) $f(x) = 5x^3 + x$ б) $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 3x}$ в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ г) $f(x) = 5x^3 + x^2 + 4$

2. Выясните чётной или нечётной является функция, заданная графиком.

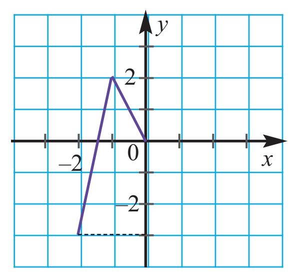


3. Выясните чётной или нечётной является функция:

$f(x) = -x^2 + 6$	$f(x) = -x^3 + x$	$f(x) = \lvert x\rvert + 4$	$f(x) = x^{-2}$
$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = -3x^2 - 5$	$f(x) = \lvert x\rvert^3$	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2 + 1}$
$f(x) = -x^5$	$f(x) = 0$	$f(x) = -x(x^2 + 5)$	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x^3 - 1}$

4. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси.
а) найдите $f(4)$, если функция $f(x)$ чётная и $f(-4) = 7$
б) найдите $f(4)$, если функция $f(x)$ нечётная и $f(-4) = 7$
в) найдите $f(3) + f(-5)$, если функция $f(x)$ чётная и $f(-3) = 8$, $f(5) = -2$
г) найдите $f(2) + f(0) + f(-4)$, если функция $f(x)$ нечётная и $f(-2) = 3$, $f(4) = -7$

5. На рисунке задана одна часть графика функции $f(x)$ с областью определения $[-2; 2]$. Дополните график, если функция является:
а) чётной; б) нечётной.



6. Может ли функция с нижеследущей областью определения быть чётной или нечётной?
а) $[-6; 6]$; б) $(-6; 6)$; в) $(-6; 6]$;
г) $[-9; 10)$; д) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

7. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является чётной функцией и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
1) сравните: а) $f(2)$ и $f(3)$; б) $f(5)$ и $f(7)$; в) $f(-2)$ и $f(-3)$; г) $f(-5)$ и $f(-7)$,
2) будет ли функция $f(x)$ возрастающей или убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$?

8. Изобразите схематично график чётной функции, областью определения которой является отрезок $[-6; 6]$, возрастающей на промежутке $[-6; 0]$ и равной нулю в точке $x = -4$. При каких значениях x функция $f(x) > 0$?

Кусочное задание функции

Часто, для описания реальных жизненных ситуаций используют не одну, а несколько формул или неравенств.

Задача. Оптовый магазин при покупке не менее 10 и не более 20 спортивных рубашек, реализует их по 3 маната за штуку, при покупке более 20 рубашек - по 2 маната за штуку. Запишите зависимость между двумя величинами: выручкой C и количеством проданных рубашек n.

Решение: Имеем $C(n) = 3\cdot n$, при $10 \le n \le 20$ и $C(n) = 2\cdot n$, при $n > 20$ и в общем виде функцию можно записать так:

$$C(n) = \begin{cases} 3\cdot n, & 10 \le n \le 20 \\ 2\cdot n, & n > 20 \end{cases}$$

Найдём значения функции $C(n)$ при $n = 15$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$.

Значения $n = 15$ и $n = 20$ удовлетворяют условию $10 \le n \le 20$. Эти значения вычислим по формуле $3\cdot n$:

$C(15) = 3\cdot n = 3\cdot 15 = 45$, $C(20) = 3\cdot n = 3\cdot 20 = 60$.

Значения $n = 30$ и $n = 40$ соответствуют условию $n > 20$:

$C(30) = 2\cdot 30 = 60$, $C(40) = 2\cdot 40 = 80$.

Если функция задана различными формулами на разных участках области определения, то говорят о кусочном задание функции.

Пример 1. Постройте график функции.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{при } x < 1 \\ x - 2, & \text{при } x \ge 1 \end{cases}$$

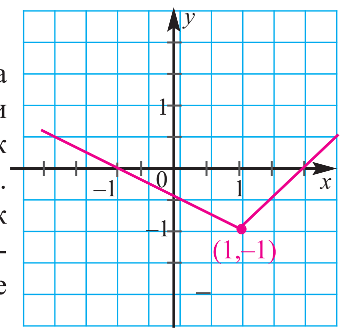
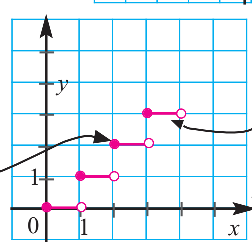


График данной функции состоит из части графика прямой $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ слева от точки $x = 1$ и части графика прямой $y = x - 2$ справа от $x = 1$. Так как $f(1) = -1$, то график “ломается” в вершине $(1; -1)$. Функция является непрерывной, если её график можно изобразить “не отрывая” карандаша от бумаги. Функция представленная в данном примере непрерывная.

Пример 2. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{при } 1 \le x < 2 \\ 2, & \text{при } 2 \le x < 3 \\ 3, & \text{при } 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Закрашенный кружочек показывает, что $f(2) = 2$.



Не закрашенный (выколотый) кружочек показывает, что $f(4) \ne 3$

График данной функции ступенчатый. Если график имеет разрыв, то функция является разрывной.

Данная функция, каждому числу ставит в соответствие его целую часть, и в общем виде записывается как $f(x) = [x]$. График на рисунке соответствует функции целой части числа на промежутке $[0; 4)$.

Кусочное задание функции

Обучающие задания

1. Вычислите значения функции при заданных значениях аргумента.

$$f(x)=\begin{cases}2x-3\,, & x\le 4\\ 3x+5\,, & x>4\end{cases}\qquad \text{а) } x=1{,}5\qquad \text{б) } x=4\qquad \text{в) } x=-2\qquad \text{г) } x=12$$

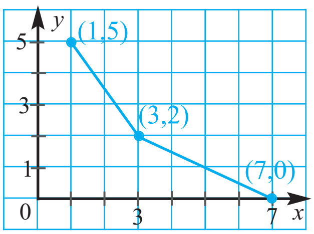
2. Для функции $f(x)=\begin{cases}-2x\,, & x\le 0\\ \sqrt{x}\,, & x>0\end{cases}$ найдите:

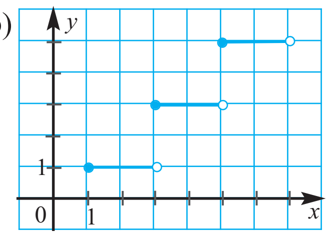
а) $f(-2)$ б) $f(-1)$ в) $f(0)$ г) $f(1)$ д) $f(4)$

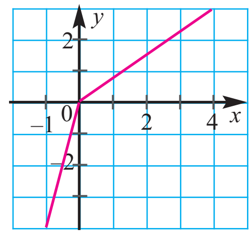
3. Постройте график функции. По графику исследуйте непрерывность функции.

а) $f(x)=\begin{cases}x+1\,, & -3\le x<1\\ 3x-1, & 1\le x\le 3\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}4, & 0\le x<2\\ 5, & 2\le x<4\\ 6, & 4\le x<6\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}1-x\,, & x<1\\ x-1, & x\ge 1\end{cases}$

4. Запишите функции, соответствующие графикам.

а)


b)


c)


5. Заданная функция показывает зависимость суммы $M(x)$ (в манатах) от количества x фотографий.

$$M(x)=\begin{cases}0{,}15x, & 0<x\le 25\\ 0{,}10x, & 26\le x\le 100\\ 0{,}07x, & 101\le x\le 500\\ 0{,}05x, & 501\le x\end{cases}$$

1) Найдите сумму, уплаченную за 20 фотографий.
2) Верно ли, что для печати 150 фотографий надо заплатить меньше 10 манат?
3) Сколько фотографий можно напечатать на 40 манат?

6. Условие оплаты за стоянку автомобиля:

0,50 манат за каждые полчаса.
Если сумма оплаты превышает 2 маната,
то автомобиль может находится на стоянке ещё 10 часов.

а) Задайте условия оплаты в виде функции.
б) Постройте график функции.
в) Запишите область определения и множество значений.

Указание: Обозначьте искомую функцию через $f(t)$ и запишите сумму для каждого интервала в зависимости от времени 0,50; 1; 1,5; 2.

7. Заработная плата работников фирмы выплачивается в зависимости от количества часов в соответствии с условием: до 40 часов в неделю 8 манат за каждый час, более 40 часов в неделю - в 1,5 раза больше нормы за каждый час. Запишите в виде кусочно- заданной функции, какую зарплату получают работники фирмы. Какую сумму получит работник за 48 часов?

Степенная функция $y = x^n$ $(n \in N)$

Функция вида $y = x^n$ (n -натуральное число) называется степенной функцией с натуральным показателем. Ниже представлены графики степенных функций при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$

а) $y = x$

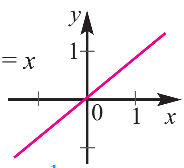


График функции $y = x$ прямая линия

б) $y = x^2$

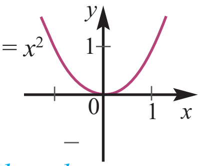


График функции $y = x^2$ парабола.

в) $y = x^3$

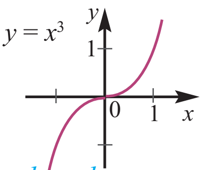
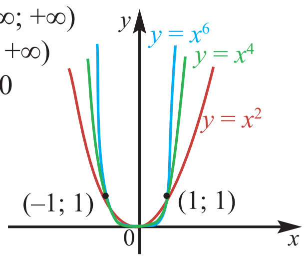


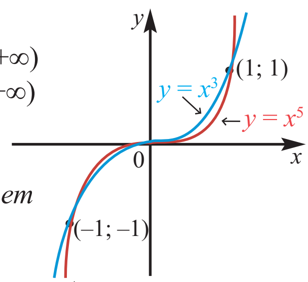
График функции $y = x^3$ кубическая парабола.

График функции $y = x^n$ для любого чётного значения n симметричен относительно оси y и похож на параболу $y = x^2$. Для любых нечётных значений n график функции $y = x^n$ симметричен относительно начала координат и для нечётных значений n больше 1, похож на кубическую параболу ($y = x^3$).

$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$
Нули: $x = 0$
$(-\infty; 0]$ ↘
$[0; +\infty)$ ↗
$x_{min} = 0$;
$f_{min} = 0$



$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
Нули: $x = 0$
$(-\infty; +\infty)$ ↗
экстремумов нет



При $n > 1$, $n \in N$ график функции x^n называется параболой n-го порядка.
По рисунку видно, что при $n > m$ на промежутке $(0; 1)$ график функции x^n находится ниже, на промежутке $(1; +\infty)$ выше графика функции x^m.

Обучающие задания

1. Сравните с нулём значения функции в точках $x = 0$; $x = -3$; $x = 5$

а) $f(x) = x^7$ б) $f(x) = x^6$

2. Проходит ли график заданной функции через заданную точку?
а) $y = x^4$, A(–2; 16) б) $y = x^5$, B(–2; 32) в) $y = x^5$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{32})$

3. Пересекает ли заданная прямая график заданной функции?
а) $y = x^8$, $y = 2$; б) $y = x^6$, $y = -3$; в) $y = x^5$, $y = 2$; г) $y = x^7$, $y = -3$

4. Даны функции $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^4$. Сравните:
а) $f(0{,}1)$ и $g(0{,}1)$; б) $f(\frac{1}{2})$ и $g(\frac{1}{2})$; в) $f(2)$ и $g(2)$; г) $f(\sqrt{7})$ и $g(\sqrt{7})$.

5. В одной координатной плоскости постройте графики функций $y = x^4$ и $y = 16$ и, по графику, решите неравенства: $x^4 < 16$ и $x^4 > 16$.

Классификация функций

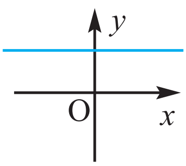
Переменные величины весьма различны. Однако, на первый взгляд различные процессы, могут иметь одинаковую природу и заданы одинаковой зависимостью. Поэтому наиболее часто встречающиеся зависимости объединены в семейства, в соответствии с основной (начальной) функцией. Функции, принадлежащие одному семейству, получаются преобразованиями одной и той же основной функции.

Например, графики функций $y = 2x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -3x^2$ получаются преобразованиями параболы $y = x^2$. Поэтому эти функции, а также все функции задаваемые формулой $y = a(x - m)^2 + n$, образуют семейство и основной функцией этого семейства считается $y = x^2$.

В таблице ниже представлены графики некоторых основных функций.

Постоянная функция

$f(x) = c$

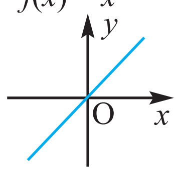


$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = \{c\}$

Тождественная функция

$f(x) = x$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = (-\infty; +\infty)$

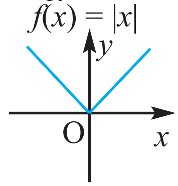
Нули функции $x = 0$

Возрастающая функция

Экстремумов нет

Модульная функция

$f(x) = |x|$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = [0; +\infty)$

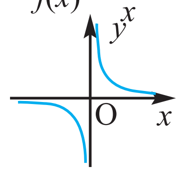
Нули функции $x = 0$

$(-\infty; 0] \downarrow$, $[0; +\infty) \uparrow$

Минимум в точке(0; 0)

Рациональная функция

$f(x) = \frac{1}{x}$



$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

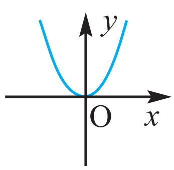
Нулей нет

$(-\infty; 0) \downarrow$, $(0; +\infty) \downarrow$

Экстремумов нет

Квадратичная функция

$f(x) = x^2$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = [0; +\infty)$

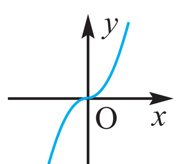
Нули функции: $x = 0$

$(-\infty; 0] \downarrow$, $[0; +\infty) \uparrow$

Минимум в точке (0; 0)

Кубическая функция

$f(x) = x^3$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = (-\infty; +\infty)$

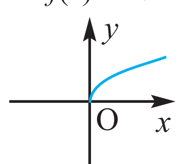
Нули функции: $x = 0$

Возрастающая функция

Экстремумов нет

Функция квадратного корня

$f(x) = \sqrt{x}$



$D(f) = [0; +\infty)$

$E(f) = [0; +\infty)$

Нули функции: $x = 0$

$[0; +\infty) \uparrow$

Экстремумов нет

Классификация функций

Обучающие задания

1. 1) Постройте графики функций, заданных в виде таблицы. Для каждой функции запишите основную функцию, соответствующего семейства.

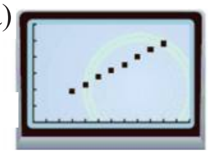
а) В таблице показана прибыль(в манатах), полученная предпринимателем начиная с 2002 года. Значение $x = 3$ соответствует 2002-году. Какую прибыль получит, приблизительно, предприниматель в 2018 году?

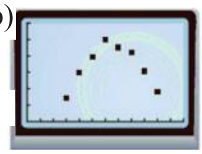
x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7931	8306	8800	9206	9588	10076	10444	10876

б) В таблице показано количество проданных буханок хлеба за каждый следующий час после 15:00. Значение $x = 3$ соответствует 15:00. Определите приблизительное количество буханок хлеба, проданных в 17:30.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	40	50	45	42	31	18

2) Определите соответствие графиков и представленных выше ситуаций.

a) 

b) 

2. Какой функции соответствуют множество точек $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$?

а) Если точку $(-1; -1)$ заменить точкой $(-1; 1)$, то какой функции будет соответствовать полученное множество?

б) Если точку $(-1; -1)$ заменить точкой $(9; 3)$, то какой функции будет соответствовать полученное множество ?

в) Если к множеству точек указанных выше добавить точки $(-2; -8)$ и $(2; 8)$, то какой функции более точно соответствовало бы данное множество точек?

3. Зависимость между величинами задана формулой $\frac{pV}{T} = const$. Приняв одну из величин за постоянную, определите характер зависимости между двумя другими величинами. Рассмотрите все возможные случаи. Укажите для каждого случая основную функцию.

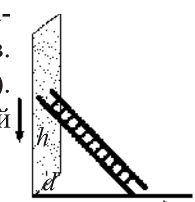
4. Зная, что между переменными y и x существует прямо или обратно пропорциональная зависимости, запишите формулу и постройте график функций $y = f(x)$, если $f(2) = 2$ и $f(4) = 1$.

5. Лестница, длиной 3 м, прислонена к стене. Нижний конец находится на d метров от стены, а верхний - на высоте h метров.

а) Запишите формулу зависимости высоты от расстояния $h(d)$.

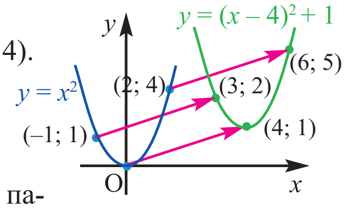
б) Установите область определения, множество значений функции и постройте график.

в) Изобразите положение лестницы при $d = 0$ м и $d = 3$ м.



Преобразование графиков

Практическое занятие



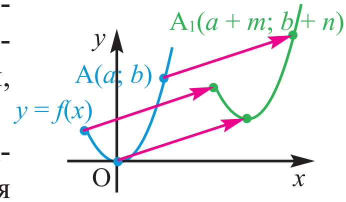
1) Отметьте на графике $y = x^2$ точки (0; 0), (–1; 1), (2; 4).
2) Произведите параллельный перенос данных точек на вектор $\langle 4; 1\rangle$.

$(0; 0) \to (4; 1)$ $(-1; 1) \to (3; 2)$ $(2; 4) \to (6; 5)$

3) Проверьте принадлежат ли точки, полученные при параллельном переносе, параболе $y = (x - 4)^2 + 1$.

Параллельный перенос

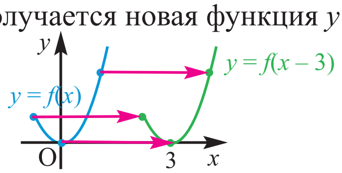
При параллельном переносе все точки графика смещаются в заданном направлении на заданное расстояние. При этом форма графика не изменяется. Произведём параллельный перенос каждой точки графика функции $y = f(x)$ на вектор $\langle m; n\rangle$: $A(a; b) \to A_1(a + m; b + n)$.



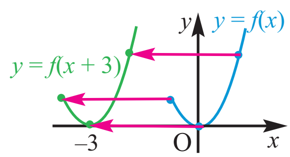
Если координаты точки A удовлетворяют равенству $b = f(a)$, то координаты точки A_1 удовлетворяют равенству $y - n = f(x - m)$. Таким образом, при параллельном переносе графика функции $y = f(x)$ на вектор $\langle m; n\rangle$, получается график функции $y = f(x - m) + n$. Заданный график смещается на $|m|$ единиц по горизонтали (при $m > 0$ вправо, при $m < 0$ влево) и на $|n|$ единиц по вертикали (при $n > 0$ вверх, при $n < 0$ вниз).

В случае $n = 0$ график параллельно переносится только по горизонтали и при этом получается новая функция $y = f(x - m)$.

Пример.



3 единицы направо

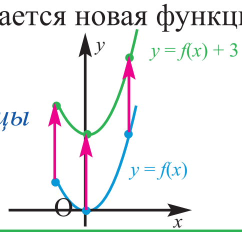


3 единицы налево

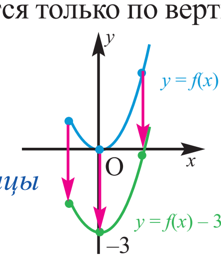
В случае $m = 0$ график параллельно переносится только по вертикали и при этом получается новая функция $y = f(x) + n$.

Пример.

3 единицы вверх



3 единицы вниз



1. Для каждой функции определите значения m и n. Запишите в каком направлении произошло смещение - по горизонтали или по вертикали?
а) $y - 4 = f(x)$ б) $y = f(x) - 4$ в) $y = f(x + 1)$ г) $y + 3 = f(x - 7)$

2. Преобразуйте заданные функции методом выделения полного квадрата. Объясните, какие преобразования надо выполнить, чтобы из графика функции $y = x^2$ получить графики данных функций.
а) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Преобразование графиков

Пример. Постройте графики заданных функций при помощи графика функции $f(x) = \sqrt{x}$.

а) $g(x) = \sqrt{x} - 1$ б) $h(x) = \sqrt{x - 1}$ в) $m(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

Решение:

Построим график функции $f(x) = \sqrt{x}$. Область определения функции $[0; \infty)$. Составим таблицу значений, выбрав три значения, которые являются полными квадратами.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	0	(0; 0)
1	1	(1; 1)
4	2	(4; 2)

а)

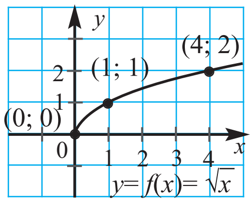
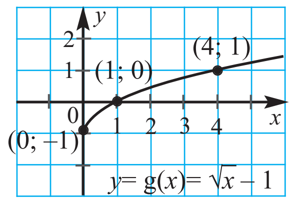


График функции $f(x) = \sqrt{x}$ смещается на 1 единицу вниз, из ординаты каждой точки на графике вычитается 1.



$\mathbf{g(x) = f(x) - 1}$

б)

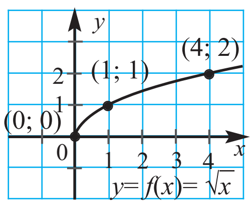
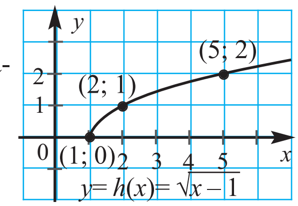
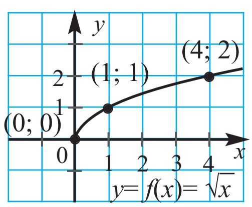


График функции $f(x) = \sqrt{x}$ смещается на 1 единицу вправо.

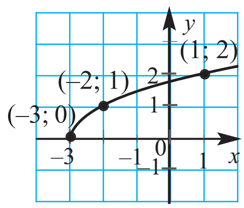
$\boldsymbol{h(x) = f(x - 1)}$



в)



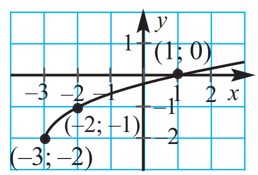
$f(x) = \sqrt{x}$



$y = m_1(x) = f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$

График функции смещается на 3 единицы влево.

$\boldsymbol{m_1(x) = f(x+3)}$



$y = m(x) = m_1(x) - 2 =$
$= \sqrt{x + 3} - 2$

График функции смещает на 2 единицы вниз.

$\boldsymbol{m(x) = f(x+3) - 2}$

3. Постройте графики заданных функций при помощи графика функции $f(x) = \sqrt{x}$. Опишите словесно каждый из этапов преобразования.

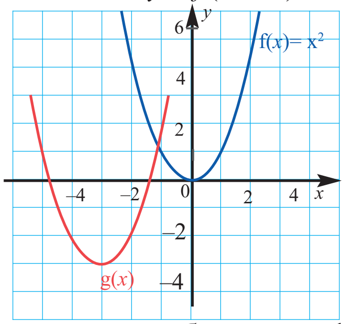
а) $g(x) = \sqrt{x} - 3$ б) $h(x) = \sqrt{x - 2}$ в) $m(x) = \sqrt{x - 1} + 2$

4. График функции $y = f(x - m) + n$ получен при помощи параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ по горизонтали и вертикали.
а) Покажите на примере, что последовательность построения не имеет значения. б) Как значения параметров m и n влияют на область определения и множество значений функции?

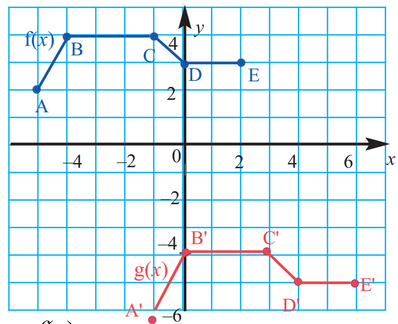
Преобразование графиков

5. По графику опишите преобразование функции $f(x)$ в функцию $g(x)$.
а) Запишите соответствие координат для 5 точек функций $f(x)$ и $g(x)$.
б) Полученную в результате преобразования функцию $g(x)$ представьте в виде $y = f(x - m) + n$.

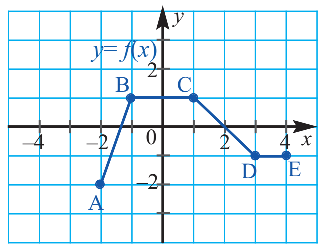
1)



2)



6. Для каждого преобразования функции $y = f(x)$:



• Определите координаты преобразованных точек для точек A, B, C, D и E.
• Начертите график функции, полученной в результате преобразования.

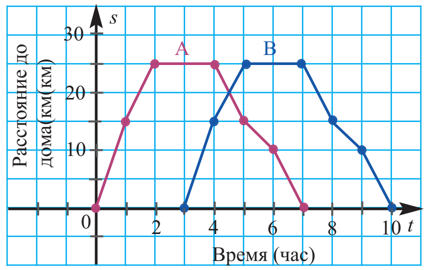
а) $g(x) = f(x) + 2$ б) $g(x) = f(x - 3)$
в) $g(x) = f(x + 1)$ г) $g(x) = f(x) - 4$

7. Для каждого параллельного переноса определите значения m и n. Полученную в результате преобразования функцию запишите в виде $y = f(x - m) + n$. Запишите своё мнения об области определения и множестве значений функции.
а) $f(x) = |x|$, 4 единицы влево и 2 единицы вниз;
б) $f(x) = x^2$, 6 единиц вправо и 4 единицы вверх;
в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 5 единиц влево и 3 единицы вниз.

8. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. В какой точке не определена функция $f(x - 3)$? Изобразите графики функций $f(x)$ и $f(x - 3)$ в одной системе координат.

9. Маляр может определить количество краски n (в литрах), необходимой для покраски стен дома площадью $\boldsymbol{s}$, функцией $n = f(s)$. Представьте ситуации соответствующие $n = f(s) + 10$ и $n = f(s + 10)$.

10. Улькер на велосипеде проделала путь от дома до озера, расположенного на окраине города, и обратно. Пройденный путь и затраченное время она изобразила на графике **A**. а) Как изменился бы график, если бы Улькер выехала из дома на 2 часа позже? б) Как вы представите ситуацию, соответствующую графику **B** на рисунке?

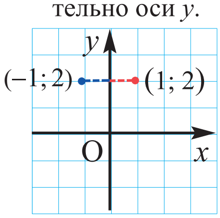


Преобразование графиков

Отражение

Относительно оси ординат

Каждая точка на графике преобразуется в точку симметричную относительно оси y.



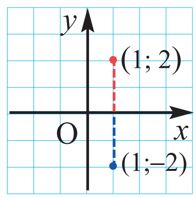
$(1; 2) \to (-1; 2)$

$(x; y) \to (-x; y)$

Ордината точки остаётся неизменной, абсцисса меняет знак.

Относительно оси абсцисс

Каждая точка на графике преобразуется в точку симметричную относительно оси x.



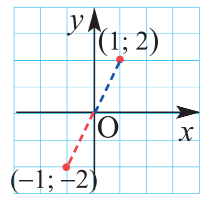
$(1; 2) \to (1; -2)$

$(x; y) \to (x; -y)$

Абсцисса точки остаётся неизменной, ордината меняет знак.

Относительно начала координат

Каждая точка на графике преобразуется в точку симметричную относительно начала координат.



$(1; 2) \to (-1; -2)$

$(x; y) \to (-x; -y)$

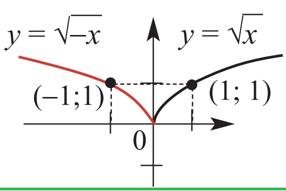
Каждая координата точки меняет знак.

Отражение графиков функции.

Относительно оси y

$f(x) \to f(-x)$

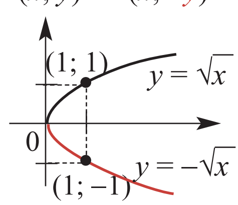
$(x; y) \to (-x; y)$



Относительно оси x

$f(x) \to -f(x)$

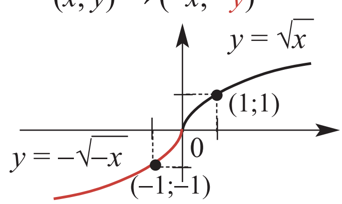
$(x; y) \to (x; -y)$



Относительно начала координат

$f(x) \to -f(-x)$

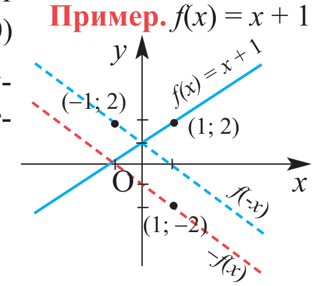
$(x; y) \to (-x; -y)$



11. Изобразите точки, полученные при отражением заданных точек относительно: а) оси x; б) оси y и запишите их координаты.

A(5; 3), B(–5; –5), C(0; –3), D(–6; 2), F(9; 0)

Пример. $f(x) = x + 1$



12. Изучите пример. Изобразите графики, полученные при отражении заданных функций относительно координатных осей $-f(x)$ и $f(-x)$.

а) $f(x) = x + 1$ б) $f(x) = -x + 3$

в) $f(x) = x^3$ г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

13. Для каждой из заданных функций запишите основную функцию и её преобразования.

а) $y = -x^2 + 2$ б) $y = -\sqrt{x} + 1$ в) $y = \dfrac{1}{x-1}$ г) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

14. Постройте график функций заданных множеством точек. Определите соответствующие преобразования графиков функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

а) $\{(-2; 8), (-1; 1), (0; 0), (1; -1), (2; -8)\}$
б) $\{(0; 0), (-1; 1), (-4; 2), (-9; 3), (-16; 4)\}$
в) $\{(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4)\}$
г) $\{(-4; 3), (-2; 1), (0; -1), (2; -3), (4; -5)\}$

15. Постройте график функции, заданной таблицей. Покажите основную функцию и какие преобразования для неё выполнены.

а)

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-2	0	-2	-4

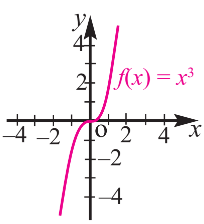
б)

x	0	1	4	9	16
y	0	-1	-2	-3	-4

16. Запишите, по шагам, при помощи каких преобразований из графика параболы $y = x^2$ получился график функции $y = -(x+1)^2 + 3$. Каждый шаг изобразите графически.

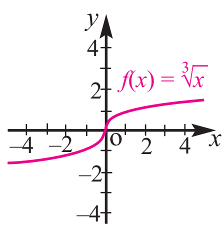
17. Постройте графики требуемых функций, используя график основных функции.

1) Основная функция: $f(x) = x^3$



а) $f(x) = (x + 1)^3$
б) $f(x) = x^3 - 4$
в) $f(x) = -x^3$
г) $f(x) = -(x - 2)^3$
д) $f(x) = -x^3 + 3$

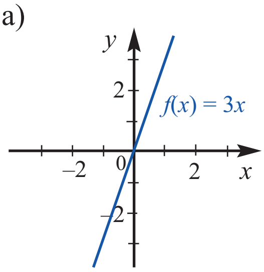
2) Основная функция: $g(x) = \sqrt[3]{x}$



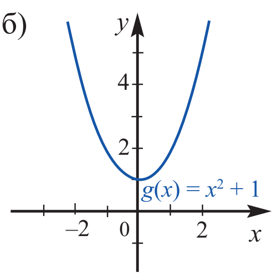
а) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$
б) $g(x) = \sqrt[3]{x - 4}$
в) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$
г) $g(x) = \sqrt[3]{-x}$
д) $g(x) = -\sqrt[3]{x - 3}$

18. Выполните задания по графику.
1) Запишите формулу функции отражённой относительно оси x.
2) Для каждой функции найдите область определения и множество значений.

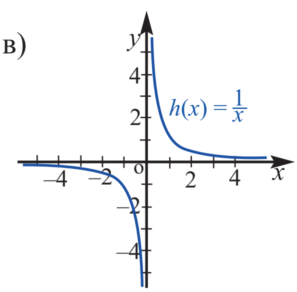
а)



б)



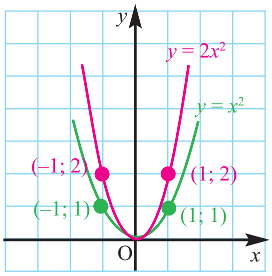
в)



Преобразование графиков

Сжатие и растяжение графиков

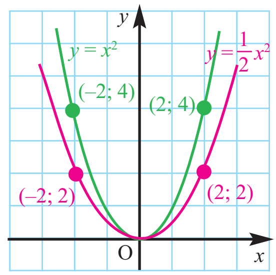
растяжение от оси x в 2 раза



$(1; 1) \to (1; 2)$

На графике каждая точка в 2 раза удаляется от оси абсцисс

сжатие к оси x в 2 раза



$(2; 4) \to (2; 2)$

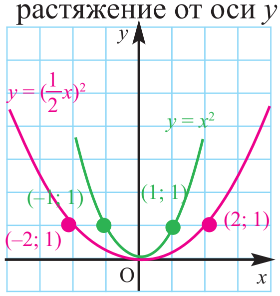
На графике каждая точка в 2 раза приближается к оси абсцисс

При растяжении от (сжатии к) оси абсцисс изменяется ордината точки, при этом абсцисса остаётся неизменной: $(a; b) \to (a; l{\cdot}b)$

Если точка $A(a; b)$ расположена на графике функции $y = f(x)$, то $b = f(a)$.
Тогда точка $A_1(a; l{\cdot}b)$ расположена на графике функции $y = l{\cdot}f(x)$.

График функции $y = l{\cdot}f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ растяжением в l раз от ***оси абсцисс*** при $l > 1$ и сжатием к ***оси абсцисс*** в $\frac{1}{l}$ раз при $0 < l < 1$.

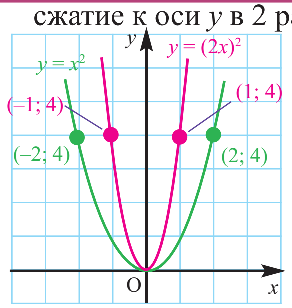
растяжение от оси y в 2 раза



$(1; 1) \to (2; 1)$

На графике каждая точка в 2 раза удаляется от оси ординат

сжатие к оси y в 2 раза



$(2; 4) \to (1; 4)$

На графике каждая точка в 2 раза приближается к оси ординат

При растяжении от (сжатии к) оси ординат изменяется абсцисса точки, при этом ордината остаётся неизменной: $(a; b) \to (k{\cdot}a; b)$

Если точка $A(a; b)$ расположена на графике функции $y = f(x)$, то $b = f(a)$.

Тогда точка $A_1(k{\cdot}a; b)$ расположена на графике функции $y = f(\frac{x}{k})$.

График функции $y = f(\frac{x}{k})$ получается из графика функции $f(x)$ растяжением в k раз от ***оси ординат*** при $k > 1$ и сжатием в $\frac{1}{k}$ раз к ***оси ординат*** при $0 < k < 1$.

19. В одной координатной плоскости, при помощи графика основной функции постройте графики следующих функций: а) $y = 2x$, б) $y = \frac{1}{2}x$. Объясните, каким образом график приближается или удаляется от осей Oy и Ox.

Преобразование графиков

20. Постройте график функции, используя график основной функции.

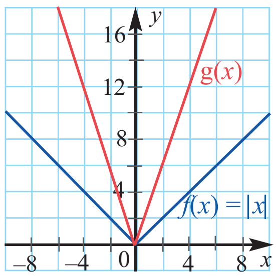
а) $y = 2x^2$ б) $y = 2(x-1)^2$ в) $y = 3|x|$ г) $y = -|3x|$

21. Изобразите преобразования при помощи которых получены следующие функции.

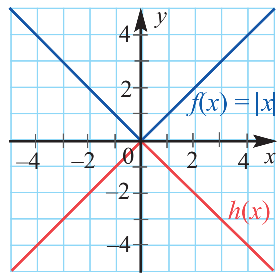
$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow g(x) = 2\sqrt{x-2} \rightarrow h(x) = 2\sqrt{x-2} + 3 \rightarrow k(x) = -2\sqrt{x-2} - 3$

22. В тетради изобразите графики. На графике запишите алгебраическую запись функций $g(x)$ и $h(x)$.

а)



б)



23. Запишите, с помощью каких преобразований из основной функции $f(x)$ получены следующие функции.

1) $f(x) = x$ а) $y = 3x$ б) $y = -2x$ в) $y = \frac{1}{2}x + 1$

2) $f(x) = x^2$ а) $y = x^2 + 3$ б) $y = (x-3)^2$ в) $y = 2(x-1)^2 + 3$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ а) $y = 2\sqrt{x}$ б) $y = \sqrt{2x}$ в) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ а) $y = \frac{2}{x}$ б) $y = \frac{1}{2x}$ в) $y = \frac{1}{x} + 1$

24. **Вопрос открытого типа.** Запишите функцию,полученную из основной функции $f(x)$, в результате требуемых преобразований.

а) параллельным переносом: •налево •направо •вверх •вниз

б) отражением: • относительно оси x • относительно оси y

в) растяжением: • от оси x • от оси y

г) сжатием: • к оси x • к оси y

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = |x|$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$

25. **Прикладное искусство.** На коврах можно наблюдать узоры, созданные преобразованием определённых графиков. В результате каких преобразований над функциями получены узоры на ковре вида килим на рисунке?

Запишите соответствующие преобразования для функции $y = f(x - m)$.

26. График какой функции получится из графика функции $f(x) = \sqrt{x}$ при:

а) растяжения от оси абсцисс в 2 раза;

б) сжатия к оси ординат в 4 раза?

Действия над функциями

Выполняя арифметические действия над двумя функциями можно получить новую функцию. Область определения, которая получается при сложении, вычитании, умножении функций $f(x)$ и $g(x)$, является множество действительных чисел, в котором определена каждая из функций. Другими словами, область определения новой функции является множество пересечения областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$:$D = D(f) \cap D(g)$. Отношение двух функций определено для аргументов множества D и отличных от нуля значений функции в знаменателе. Над функциями $f(x)$ и $g(x)$, определенными на множестве действительных чисел, можно выполнять сложение, вычитание, умножение и деление по следующим правилам.

Действие	Математическая запись	Пример $f(x) = x + 5$ и $g(x) = 3x$
Сложение	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 5) + 3x = 4x + 5$
Вычитание	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 5) - 3x = -2x + 5$
Умножение	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(x + 5) \cdot 3x = 3x^2 + 15x$
Деление	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$\frac{x+5}{3x}$

1) Сумма двух чётных функций является чётной функцией, сумма двух нечётных функций является нечётной функцией.

2) Произведение(частное) двух чётных и произведение(частное)двух нечётных функций является чётной функцией.

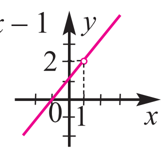
Пример 1. Найдём $(f + g)(2)$ для функций $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = x + 2$.

Решение: $f(2)=2^2+1=5$, $g(2)=2+2=4$, $(f+g)(2)=f(2) + g(2)=5+4= 9$

Пример 2. Найдём $(\frac{f}{g})(x)$ для функций $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = x - 1$

Решение:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$



Так как функция в знаменателе $g(x) \neq 0$, то $x \neq 1$. Графиком этой функции является прямая $y = x + 1$ с выколотой точкой (1; 2).

Пример 3. Известно, что $f(x) = 3x^2 - 1$ и $g(x) = \sqrt{2x - 1}$.

Найдём область определения функций: а) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, б) $\frac{f}{g}$.

Решение: а) Область определения функции $f(x) = 3x^2 - 1$ - множество всех действительных чисел. Область определения функции $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ находится из неравенства $2x - 1 \geq 0$: $[\frac{1}{2}; +\infty)$. Область определения функций $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$: $(-\infty; +\infty) \cap [\frac{1}{2}; +\infty) = [\frac{1}{2}; +\infty)$.

б) Область определения функции $\frac{f}{g}$ является множество решений неравенства $2x - 1 > 0$, т.е. промежуток $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Действие над функциями

Обучающие задания

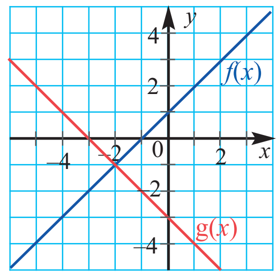
1. Известно, что $f(x) = \sqrt{3x-2}$ и $g(x) = -x+1$.
Найдите: $(f+g)(1)$, $(f-g)(2)$, $(f\cdot g)(6)$.

2. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ запишите формулы и область определения функций: $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$.

а) $f(x) = x^2 - 2x$ и $g(x) = 2x - 4$ б) $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x + 1$

в) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ и $g(x) = 2x + 6$ г) $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

3. При помощи графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ постройте график функции $h(x) = (f+g)(x)$. Представьте решение двумя способами:



1) по графику составьте таблицу значений функций $f(x)$ и $g(x)$. Используя полученные значения, составьте таблицу значений для функции $h(x)$.

2) по графику функций $f(x)$ и $g(x)$ задайте формулу для функции $f(x) + g(x)$. Для полученной функции составьте таблицу значений.

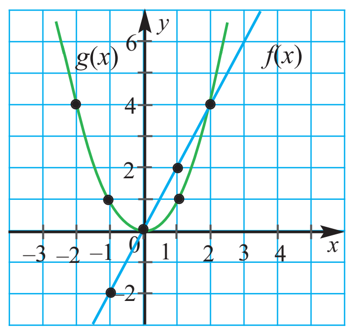
4. Даны функции $f(x) = x$, $x \in [-1; 9]$ и $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 16]$. Найдите область определения функции $h(x) = (f+g)(x)$, составьте таблицу значений и постройте график.

5. Дано: $f(x) = 2x$ и $g(x) = x^2$

а) Задайте таблицу значений функции $(f : g)(x)$.

б) Постройте график функции $h(x) = (f : g)(x)$.

x	$(f \div g)(x)$
–4	
–2	
–1	
1	
2	
4	



в) Установите область определения и множество значений функции $h(x)$.

Прикладные задания

6. Самая ханум изготавливает и сдаёт в магазин для продажи узорные скатерти. Для этого она на 40 манат купила шёлковые нитки и потратила на ткань для каждой скатерти 5 манат. Изготовленные скатерти Самая ханум продаёт по 10 манат за штуку.

а) Запишите формулы для функций $s(n)$ и $m(n)$, где $s(n)$ - выручка от продажи, а $m(n)$ – затраты на изготовление n скатертей.

б) В одной системе координат постройте графики этих функций. Представьте реальную ситуацию, соответствующую общей точке.

в) Прибыль равна разнице выручки от продажи и затратами на изготовление. Запишите формулу для функции $g(n)$, выражающую полученную прибыль.

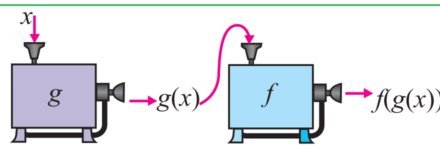
Сложная функция

Исследование. Цена 1 *литра* бензина 0,95 манат. Автомобиль Фарида расходует 0,08 *л* бензина на каждый километр.

а) Если Фарид проедет 50 км, то как вы сможете посчитать какую сумму он потратит? За сколько шагов можно выполнить эти вычисления?

б) Зависимость между объёмом бензина и пройденным путём задайте функцией $V(d)$; в) Зависимость между суммой за бензин и объёмом бензина задайте функцией $M(V)$; г) Запишите функцию $M(d)$, связывающую путь, который проделал Фарид и сумму, потраченную на бензин, объединив функции пункта б) и в). Какие переменные, в данном случае, формируют аргумент?

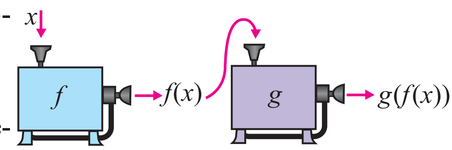
Во многих случаях значения, которые может принимать аргумент функции, можно определить через значения других функций. Пусть заданы функции f и g.



Рассмотрим схематическое представление двух ситуаций.

1. Если числа x принадлежат области определения функции g, а $g(x)$ -принадлежат области определения функции f, то в этом случае функция, которая каждому числу $x \in D(g)$ ставит в соответствие число $f(g(x))$, для функций f и g называется сложной функцией (композицией) и записывается так $(f \circ g)(x)$:

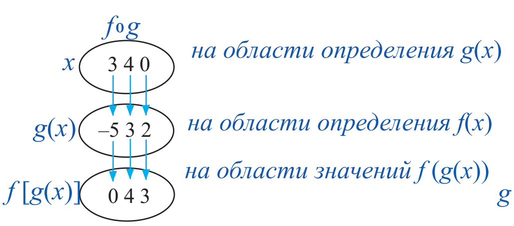
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



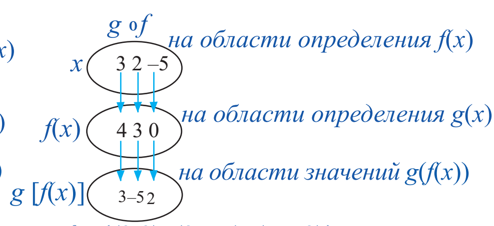
2. Если числа x принадлежат области определения функции f, а $f(x)$ -области определения функции g, то для функций g и f композицией $(g \circ f)(x)$ будет:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Обратите внимание! Запись $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$, (так же как и запись $f(g(x))$ и $g(f(x))$) выражают две различные функции. Композиция $f(g(x))$ может быть построена, если $E(g) \subset D(f)$, а композиция $g(f(x))$, если $E(f) \subset D(g)$.



$f \circ g = \{(3;0), (4;4), (0;3)\}$



$g \circ f = \{(3;3), (2; –5), (–5; 2)\}$

Из схемы видно, что композиция $f \circ g$ получается, если в функции $f(x)$ аргумент x заменить функцией $g(x)$. Аналогично, композиция $g \circ f$ получается, если в функции $g(x)$ аргумент x заменить функцией $f(x)$.

Пример 1. Для функций $f(x) = x + 2$ и $g(x) = x^2 - 2x - 3$:

а) запишите формулы композиций $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$;

б) найдите значения композиций $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$ при $x = 3$.

Решение: а)$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 - 2x - 1$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$
Таким образом, $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$ и $g(f(x)) = x^2 + 2x - 3$
б)$(f \circ g)(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$
$(g \circ f)(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

Пример 2. Дано: $(x) = f(g(x))$,запишите формулы для функции $f(x)$
а) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$; $g(x) = x - 2$
б) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $g(x) = x^3 + 1$
Решение: а) $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1$; $f(x) = x^2 + x + 1$
б) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$; $f(x) = \sqrt{x}$

Обучающие задания

1. Для композиций $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$ определите (если они существуют) пары аргументов и соответствующих значений.

$f = \{(2; 8), (4; 0), (6; 3), (5; -1)\}$
$g = \{(8; 4), (0; 6), (3; 5), (-1; 2)\}$

$f = \{(4; 5), (1; 3), (-2; 12), (2; 7)\}$
$g = \{(3; 4), (5; 2), (7; -2), (12; 1)\}$

2. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу.

точки функции g	*точки функции f*	*точки функции f∘g*
(3; 2)		(3; 5)
(2; 1)	(1; 3)	
(1; ■)	(0; 1)	(■ ; 1)
(■ ; –1)	(■; –1)	(0; –1)
(■ ; 3)	(3; ■)	(4; 7)

3. Даны функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x} - 1$. Найдите:
а) $f(g(4))$;
б) $g(g(25))$;
в) $g(f(3))$;
г) $g(g(4))$;
д) $f(f(-3))$.

4. Для функций $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^2 - 1$ и $h(x) = x^2 + 1$ вычислите:
а) $f(g(-1))$ б) $h(g(2))$ в) $g(f(3))$
г) $f(h(-4))$ д) $g(g(-2))$ е) $f(f(-3))$
ж) $(f \circ (h \circ g))(1)$ з) $(h \circ (g \circ f))(\frac{1}{2})$ и) $(f \circ (g \circ h))(2)$

5. Для функций $f(x) = 2x + 1$ и $g(x) = x^2 - 3$ запишите формулы сложных функций.
а) $f(g(x))$ б) $g(f(x))$ в) $f(f(x))$ г) $g(g(x))$

6. Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$.
а) $f(x) = 1 - x^2$ и $g(x) = 2x + 5$ б) $f(x) = 2x$ и $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
в) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ и $g(x) = x^2 + 2$ г) $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = \frac{2}{x}$
д) $f(x) = x^3 - 4$ и $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$ е) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ и $g(x) = x + 1$

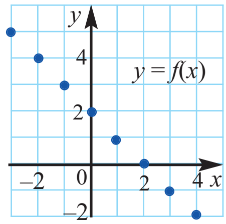
7. а) Решите неравенство $f(g(x)) < 0$, если $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
б) Решите неравенство $f(g(x)) > 0$, если $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 1$.

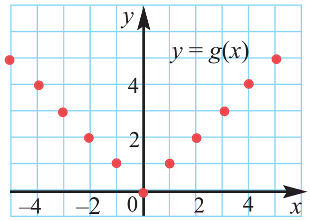
Сложная функция

8. Даны графики функций $f(x)$ и $g(x)$. Постройте графики сложных функций: а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$.

1) Задав таблицу значений.
2) Записав формулу сложной функции.

Покажите область определения и множество значений.





9. Даны функции $f(x) = |x|$ и $g(x) = x - 1$. Постройте графики композиций а) $y = f(g(x))$, б) $y = g(f(x))$. Покажите область определения и множество значений.

10. а) Известно, что $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^2$. Составьте формулу для функции $f(g(x))$.

б) В одной системе координат постройте графики функций $f(x)$, $g(x)$ и $f(g(x))$.

в) Опишите преобразование графика функции $g(x)$ в график функции $f(g(x))$.

11. **Производство.** Количество стульев, производимых фирмой по производству мебели еженедельно с 2012 года, можно смоделировать формулой $N(t) = 144 + 25t$. Здесь, t - время (в годах) (значение $t = 0$ соответствует 2012 году), N - количество стульев. В этом случае объём рабочей силы можно определить как $W(N) = 3\sqrt{N}$.

а) Запишите функцию спроса на рабочую силу, в зависимости от времени.

б) Для данной функции представьте область определения и множество значений для реальной жизненной ситуации.

12. Если $h(x) = f(g(x))$, то запишите формулу функции $f(x)$.

а) $h(x)=(x+1)^2-5(x+1)$, $g(x)=x+1$ б) $h(x)=x^2+4x+3$, $g(x)=x+2$

в) $h(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x + 1$ г) $h(x) = x + \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

13. а) Для функции $f(x - 1) = x + 3$, найдите значения $f(1), f(4), f(-1), f(0)$. Запишите формулу для функции $f(x)$.

б) Для функции $f(x + 1) = 2x + 3$, найдите значения $f(-1), f(2), f(3), f(0)$. Запишите формулу для функции $f(x)$.

14. Дана функция $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

а) Найдите область определения функции $f(x)$, составьте таблицу значений и постройте график.

б) Запишите выражение для функции $f(2x)$, найдите область определения и постройте график.

15. Отрезок $[-1; 3]$ является областью определения функции $f(x)$. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(2x)$; б) $f(\frac{1}{2}x)$; в) $f(-x)$; г) $f(x - 1)$

Обратная функция

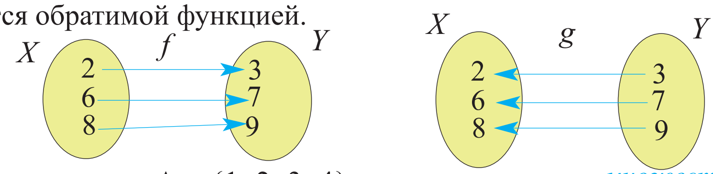
Исследование: 1) Запишите формулу площади квадрата со стороной a: $S = a^2$

2) По заданной площади найдите длину стороны квадрата.

3) Расстояние от поверхности земли до тела, брошенного с начальной скоростью v_0 находится по формуле $h = v_0 t - \frac{g t^2}{2}$. Можно ли при заданном значении h, найти однозначное значение t?

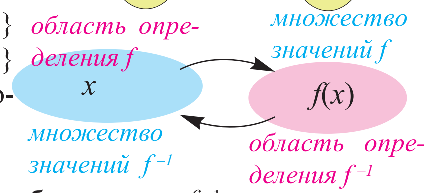
На рисунке зависимость f между множествами X и Y задана стрелками. Поменяв направление стрелок, получим зависимость g - зависимость между множествами Y и X. Соответствие g является обратным для f. Если для заданной функции f обратное соответствие также является функцией, то функция f называется обратимой функцией.

Пример 1.



Пример 2. Из множества A = {1, 2, 3, 4} можно получить множество B = {5, 6, 7, 8} при помощи функции $f(x) = x + 4$ следующим образом:

$f(x) = x + 4$: {(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)}



Функция, обратная для данной функции, обозначается f^{-1} и выражает как, из элементов множества B можно получить элементы множества A.

$f^{-1}(x) = x - 4$: {(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 4)}

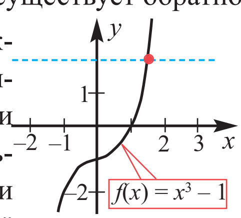
Функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ называются взаимно обратными функциями.

Как из схемы, так и из пар координат, видно,что область определения заданной функции, является множеством значений для обратной функции, а множество значений заданной функции - областью определения для обратной функции и наоборот. Таким образом, $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$. Из определения, $f(f^{-1}(x)) = x$ и $f^{-1}(f(x)) = x$. Для данного примера имеем:

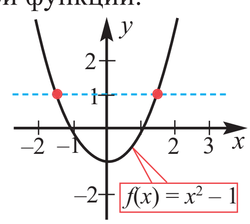
$$f(f^{-1}(x)) = f(x - 4) = (x - 4) + 4 = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 4) = (x + 4) - 4 = x$$

Для любой ли функции существует обратная функция? Например, из зависимости $y = 2x + 5$ переменную x можно единственным образом выразить через y и обратная функция имеет вид: $x = \frac{y - 5}{2}$. Здесь каждому значению y соответствует единственное значение x. В функции $y = x^2$ одному значению y, например, для $y = 9$, соответствует два значения аргумента $x = 3$ и $x = -3$ и на промежутке $(-\infty; +\infty)$ для неё не существует обратной функции.

Обратить можно ту и только ту функцию, которая каждое свое значение принимает в единственной точке области определения. Если любая горизонтальная прямая пересекает график функции как максимум в одной точке, то для неё существует обратная функция.



существует обратная функция



не существует обратная функция

Другими словами, если различным значениям x соответствуют различные значения y, то для функции $y = f(x)$ существует обратная функция.
Так как для монотонной функции при $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$, то:
1) Для возрастающей на области определения функции, существует обратная функция.
2) Для убывающей на области определения функции, существует обратная функция.
Пусть, $y = f(x)$ функция для которой существует обратная функция, т.е. в отношении $y = f(x)$ можно однозначно выразить x через y и записать в виде $x = f^{-1}(y)$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ называется обратной для функции $y = f(x)$.
Обычно, аргумент обозначается через x , а функция обозначается через y. Поэтому, функция, обратная для $y = f(x)$ записывается как $y = f^{-1}(x)$. Если f^{-1} функция, обратная для функции f, то функция f является обратной функцией для функции f^{-1}. Функции f и f^{-1} являются взаимно обратными функциями.

Графики взаимно обратных функций.

Если точка $(a; b)$ расположена на заданном графике,то точка $(b; a)$ будет расположена на графике обратной функции.

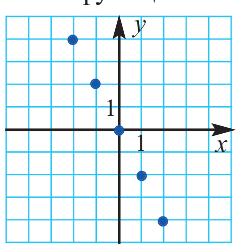
Заданная функция

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	0	–2	–4

Обратная функция

x	4	2	0	–2	–4
y	–2	–1	0	1	2

График заданной функции



Пример отражения относительно оси $y = x$

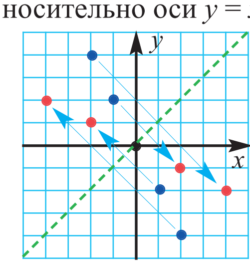
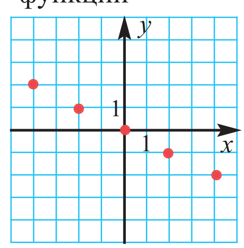
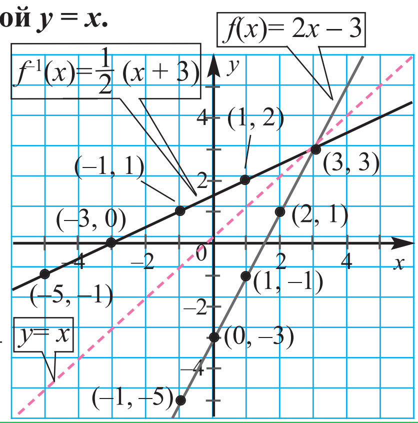


График обратной функции



Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Для того, чтобы найти обратную функцию по формуле надо:
1) Выразить переменную x через y.
2) В полученном равенстве вместо x запишем y, вместо y запишем x.



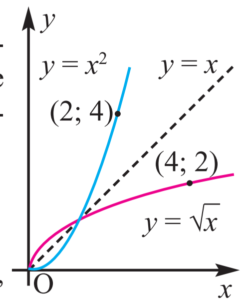
Пример 3. запишем обратную функцию для функции $y = 2x - 3$

Решение: запишем функцию $y = 2x - 3$
выразим переменную x через y: $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$
поменяем местами x и y : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Обратная функция

На всей числовой оси для функции $y = x^2$ не существует обратной функции. Однако, на промежутках возрастания или убывания для этой функции, обратная функция существует.

Пример 4. Для функции $y = x^2$ зададим обратную функцию, при $x \geq 0$ и построим их графики в одной системе координат. Запишем координаты нескольких точек, расположенных на этом графике.



Решение: Заданная функция: $y = x^2, x \geq 0$.

Обратная функция: 1) $x = \sqrt{y}$, 2) $y = \sqrt{x}$

Точка (2, 4) расположена на графике функции $y = x^2, x \geq 0$, а точка (4; 2) на графике обратной функции $y = \sqrt{x}$.

Для обратной функции справедлива следующая теорема:

Если функция f с областью определения X и множеством значений Y возрастающая (убывающая), то для неё существует обратная функция f^{-1}, определённая на промежутке Y, которая также является возрастающей (убывающей).

Обучающие задания

1. Функция задана множеством точек: $\{(8; 2), (1; 1), (\frac{1}{8}; \frac{1}{2}), (-8; -2)\}$; Изобразите при помощи стрелок заданное и обратное соответствия.

2. Используя данные в таблице составьте таблицу значений для обратной функции.

x	1	2	3	4	5
y	–1	–2	–3	–4	–5

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные функции. При $x = 10$ значение $f(x)$ равно 85. Как эти значения могут относится к функции $g(x)$?

4. Функция f задана множеством точек. Так же известно, что вторые координаты некоторых точек одинаковы (например, как (6; 5) и (7; 5)). Достаточно ли информации, чтобы установить является или нет функция f обратимой функцией?

5. Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию и $f(1) = 7$; $f(-3) = 9$, $f(6) = 2$, то найдите значения $f^{-1}(9)$; $f^{-1}(7)$ и $f^{-1}(2)$.

6. Для заданных функций запишите взаимно обратные функции. Установите возрастающими или убывающими являются заданная и обратная функции.

а) $y = 4x$ б) $y = 2x - 8$ в) $y = 3x - 14$

г) $y = -2x + 5$ д) $y = 3x - 3$ е) $y = 12x + 6$

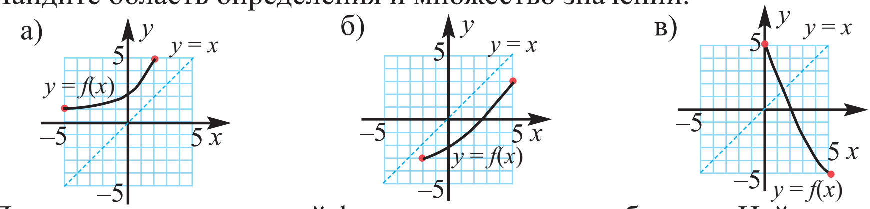
ж) $y = -\frac{2}{3}x$ з) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{3}{8}$ и) $y = \frac{3}{4}x + 6$

7. В одной системе координат постройте графики для заданных функций и функций, обратных заданным.

а) $f(x) = 4x$ б) $f(x) = 2x - 3$ в) $f(x) = x^2, x \geq 0$ г) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0,$

Обратная функция

8. Для графика на рисунке, постройте график обратной функции. Найдите область определения и множество значений.



9. Покажите, что для данной функции существует обратная. Найдите обратную функцию, область определения, множество значений и постройте её график.

а) $f(x) = x^3$ б) $f(x) = x^4, x \geq 0$

10. Постройте графики заданных функций. Определите имеет ли функция обратную функцию.

а) $f(x) = -2x + 3$ б) $f(x) = x + 3$ в) $f(x) = x^2 + 1$

г) $f(x) = -3x^2$ д) $f(x) = x^3 + 3$ е) $f(x) = 2x^3$

ж) $f(x) = |x| + 2$ з) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ к) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

11. Установите, являются ли функции взаимно обратными.

а) $f(x) = x + 7$, $g(x) = x - 7$ б) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

в) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = 2x - 2$ г) $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

д) $f(x) = \frac{2}{x} - 3$, $g(x) = \frac{2}{x+3}$ е) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{1+3x}{x}$

ж) $f(x) = 8x^3$, $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ з) $f(x) = 256x^4, x \geq 0$; $g(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{4}$

12. Для каждой степенной функции запишите формулу соответствующей обратной функции.

а) $f(x) = 16x^4, x \leq 0$ б) $f(x) = -x^6, x \geq 0$ в) $f(x) = x^7$

г) $f(x) = \frac{4}{9}x^2, x \geq 0$ д) $f(x) = -8x^3$ е) $f(x) = \frac{1}{32}x^5$

13. Формула $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ выражает зависимость температуры в градусах Цельсия от температуры по Фаренгейту. Для данной зависимости задайте формулу обратной зависимости, преобразовывающую температуру по Фаренгейту в температуру в градусы Цельсия. Найдите значение температуры по Фаренгейту для 15°C, 20°C, 0°C.

14. Хек - один из видов рыб. Между массой(в кг) и длиной(в см) для этого вида рыб установлена следующая зависимость: $m = (9{,}37 \times 10^{-6})l^3$. Запишите функцию, обратную для данной зависимости. Сколько сантиметров,приблизительно, составляет длина рыбы, массой 0,875 кг?

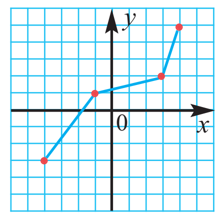
Обобщающие задания

1. Постройте графики функций $g(x) = -\sqrt{x}$, $k(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$, используя преобразования графика основной функции $f(x) = \sqrt{x}$. Как при этом изменяется область определения и множество значений функции?

2. а) На сколько единиц по горизонтали нужно параллельно перенести график функции $f(x) = x^2$, чтобы он прошёл через точку (5; 16)?
б) На сколько единиц надо сдвинуть график функции $f(x) = \sqrt{x}$ вдоль оси y, чтобы график прошёл через точку (4 ; –1)?

3. а) Запишите функцию $g(x)$ обратную для функции $f(x) = x^3 - 1$.

б) Для графика на рисунке постройте график обратной функции.



4. Найдите область определения функций.

а) $f(x) = \sqrt{4x - 2}$ в) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x}}$ д) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x - 3}$

б) $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$ г) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$ е) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

5. Найдите нули функции.

а) $f(x) = 4x + 6$ в) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ д) $f(x) = 3 - \sqrt{5 + x^2}$

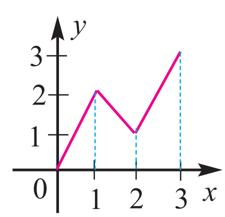
б) $f(x) = x^2 - x - 6$ г) $f(x) = x^4 - 1$ е) $f(x) = \sqrt{x - 1} - 2$

6. 1) Исследуйте функцию на чётность или нечетность.
а) $f(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$ б) $f(x) = (x - 4)^2 - (x + 4)^2$

2) Установите является ли функция $y = x^2 + (m - 1)x + 3$ чётной или нечётной, если: а) $m = 1$; б) $m = 0$.

7. Известно, что $f(x) = x \cdot f(x - 1) + 2$. Найдите $f(2)$.

8. Дана часть графика функции $f(x)$ с областью определения [–3; 3]. Достройте график так, чтобы функция стала: а) нечётной; б) чётной. Покажите промежутки возрастания и убывания функции. Найдите экстремумы функций.



Обобщающие задания

9. Постройте график кусочно - заданной функции.

а) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \geq 1 \\ -x + 3, & \text{при } x < 1 \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < -1 \\ x, & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$

10. При каких значениях аргумента значение функции:

а) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ равно 3;

б) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 7}$ равно $\dfrac{1}{2}$?

11. Даны f: $\{(0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)\}$ и $g(x) = 2x + 1$.
Найдите значение сложной функции для заданных значений переменных.
а) $(g \circ f)(0)$ б) $(g \circ f)(1)$ в) $(g \circ f)(2)$ г) $(g \circ f)(3)$
д) $(f \circ g)(-0{,}5)$ е) $(f \circ g)(0)$ ж) $(f \circ g)(1)$ з) $(f \circ g)(0{,}5)$

12. 1) Покажите, что на промежутке $(-\infty; +\infty)$ следующие функции не имеют обратной функции.

а) $f(x) = x^2 - 6x$ б) $f(x) = |x + 10|$

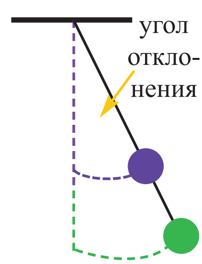
2) Для следующих обратимых функций напишите соответствующие им обратные функции.

а) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$ б) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 2}$

13. Для функции $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ найдите:
а) область определения; б) решения неравенства $f(x - 4) < 0$

14. Время, затраченное на один полный период колебания маятника (период колебания), зависит от длины маятника. Чем длиннее маятник, тем больше времени тратится.
а) По данной информации постройте график.
б) Определите к какому классу принадлежит функция.

Длина маятника ($м$)	Время (мин.)
2	2,8
4	4
6	4,9
8	5,7
10	6,3



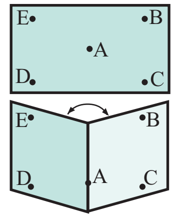
в) Если длина маятника равна 5 м, 12 м постройте график времени, затраченного на один полный период .

2 Точка, прямая и плоскость в пространстве

Точка, прямая и плоскость в пространстве
Параллельность прямой и плоскости
Перпендикулярность прямой и плоскости
Теорема о трёх перпендикулярах
Угол между двумя плоскостями
Двугранный угол
Перпендикулярные плоскости
Параллельные плоскости
Проекции. Решение задач

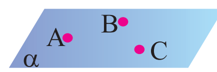
Точка, прямая и плоскость в пространстве

Практическая работа. Отметьте на листе бумаги точки A, B, C, D и E и сложите лист по прямой, проходящей через точку A как показано на рисунке. Затем раскройте лист. Каждая из частей листа, сложенного пополам, является моделью плоскости.



1. Какая из точек принадлежит каждой из плоскостей?
2. Укажите точки, принадлежащие и не принадлежащие каждой плоскости.

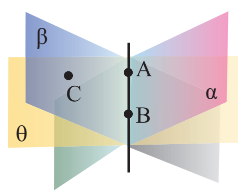
В разделе планиметрии в геометрии изучаются фигуры, все точки которых лежат в одной плоскости. Эти фигуры называются плоскими фигурами. Однако в реальной жизни нас окружают трехмерные объекты. Их измерениями являются длина, ширина и высота(глубина). Эти фигуры называются пространственными фигурами, а раздел геометрии, который занимается изучением этих фигур, называется стереометрией. Принято считать,что точка, прямая и плоскость также являются пространственными фигурами. Плоскость бесконечна, и обычно, её условно изображают в виде параллелограмма и обозначают одной маленькой буквой или тремя буквами(указывающие три точки, не расположенные на одной прямой). Например, плоскость α или плоскость ABC.



Аксиома 1. **Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.**

Аксиома 2. **Если у двух различных плоскостей есть общая точка, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.**

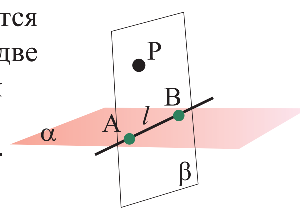
Прямая задаётся двумя точками, то есть через две точки можно провести одну и только одну прямую (а сколько прямых можно провести через одну точку?). Сколькими точками задаётся плоскость? Двумя точками плоскость задать нельзя. Как видно по рисунку, через точки A и B можно провести бесконечно много плоскостей. Однако, среди этих плоскостей есть такая плоскость, что точка C расположена на ней.Значит, плоскость можно задать тремя точками, не лежащими на одной прямой.



Аксиома 3. **Через три точки, не лежащие на одной прямой можно провести плоскость и притом только одну.**

Точки, расположенные на одной прямой, называются **коллинеарными точками.** Покажем, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости.

Пусть, точки A и B прямой l принадлежат плоскости α. Возьмём точку P, которая не принадлежит

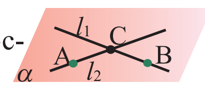


прямой l и плоскости α. Через точки P, A и B проведём плоскость β. Так как плоскости α и β пересекаются по линии, проходящей через точки A и B, то она совпадает с прямой l. Все точки линии пересечения принадлежат плоскости α, т.е. все точки прямой l также принадлежат плоскости α.

Из аксиом стереометрии вытекают следующие следствия.

1. Через прямую и точку вне её можно провести плоскость и притом только одну.

2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

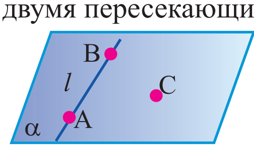


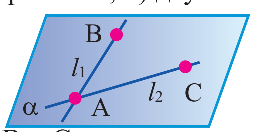
3. Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

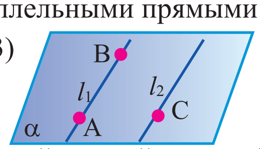
Таким образом плоскость можно задать:

1) прямой и точкой не принадлежащей этой прямой;

2) двумя пересекающимися прямыми; 3) двумя параллельными прямыми.

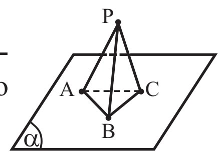
1) 

2) 

3) 

Пример. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой и точка P, не лежащая с ними в одной плоскости. Запишите названия всех плоскостей, проходящих через каждые три из них.

Решение: Через точки A, B и C проведём плоскость α и отметим точку P вне этой плоскости. Через эти точки можно провести 4 плоскости - ABP, BPC, ABC и APC.

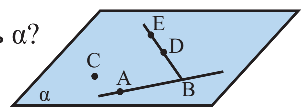


Точки, принадлежащие одной плоскости, называются **компланарными**. Точки A, B, C и P из примера некомпланарные.

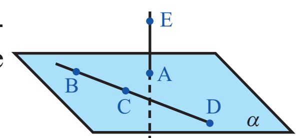
Обучающие задания

1. При помощи каких букв вы бы назвали плоскость α?

а) ABE б) ACE в) BDE г) DAC



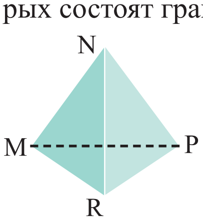
2. Точки B, C и D лежат на одной прямой (коллинеарные), точки A, B, C и D лежат в одной плоскости(компланарные), а точка E расположена вне плоскости.

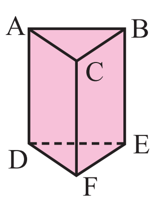


Сколько плоскостей проходит через точки:

а) A, B и C; б) B, C и D; в) A, B, C и D; г) A, B, C и E

3. Запишите плоскости, из которых состоят грани фигур.





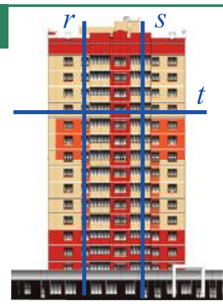
4. Объясните, почему любой стол, имеющий три ножки, обязательно устойчив.

5. а) Сколько плоскостей можно провести через три попарно пересекающиеся прямые?

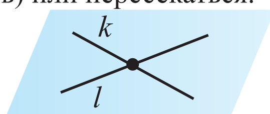
б) Сколько плоскостей можно провести через четыре различные точки? Рассмотрите все возможные случаи.

Точка, прямая и плоскость в пространстве

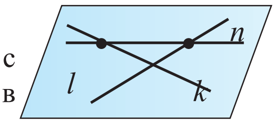
Взаимное расположение прямых в пространстве



Две прямые в пространстве могут быть параллельными (в частном случае совпадать) или пересекаться.

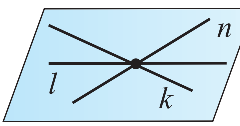


Известно, что если прямые *l* и *k* пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. В планиметрии эти два случая соответствуют пересечению или параллельности прямых.

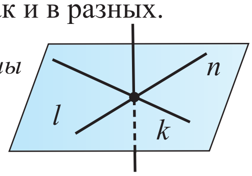


Прямые расположены в одной плоскости.

Если две пересекающиеся прямые пересекаются с третьей в разных точках, то эти прямые расположены в одной плоскости. Если две пересекающиеся прямые, пересекаются с третьей в одной точке, то они могут быть расположены как в одной плоскости, так и в разных.

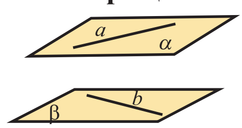


Прямые расположены в одной плоскости. Они компланарные.

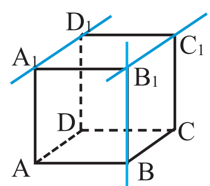


Прямые расположены в различных плоскостях. Они некомпланарные.

Две не параллельные прямые в пространстве не всегда пересекаются. Прямые, которые не параллельны и не пересекаются, называются **скрещивающимися** прямыми. Скрещивающиеся прямые *a* и *b* обозначаются так: $a \dot{-} b$. Через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость. Углу между скрещивающимися прямыми соответствует угол, между параллельными им и пересекающимися прямыми.

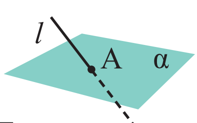


Пример. На модели куба $A_1D_1 \dot{-} BB_1$.
Так как $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, то угол между скрещивающимися прямыми A_1D_1 и BB_1 равен углу между прямыми B_1C_1 и BB_1, т.е. 90°.

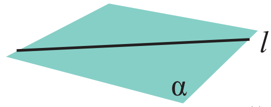


Взаимное расположение прямой и плоскости

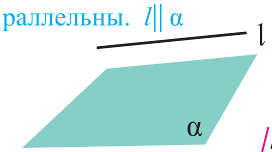
Если прямая имеет с плоскостью одну общую точку, прямая пересекает плоскость. $l \cap \alpha = A$



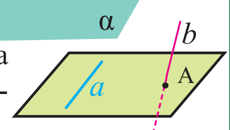
Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она полностью лежит в этой плоскости. $l \subset \alpha$



Если прямая не имеет общей точки с плоскостью, то прямая и плоскость параллельны. $l \parallel \alpha$

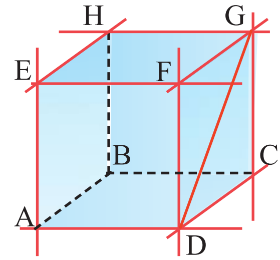


Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



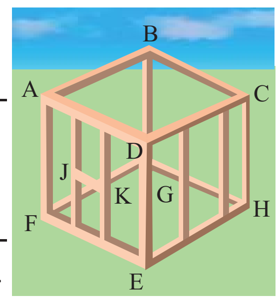
6. Для параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых в кубе. Выполните следующие задания.

а) Запишите прямые параллельные прямой AB
б) Запишите прямые пересекающиеся прямой BC
в) Запишите прямые скрещивающиеся с прямой EF
г) Покажите три точки компланарные точке B
д) Покажите три точки некомпланарные точке B
е) Покажите прямые пересекающиеся с плоскостью ABC
ж) Покажите прямые расположенные на плоскости CDF
з) Найдите угол между прямыми AB и CG.
и) Найдите угол между прямыми AB и DG.



7. При помощи прямых, содержащих отрезки на рисунке, выполните следующие задания:

а) Перечислите параллельные прямые.
б) Покажите скрещивающиеся прямые.
в) Покажите прямую, пересекающую две пересекающиеся прямые, лежащую с ними в одной плоскости.

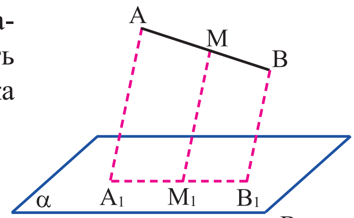


8. Нарисуйте фигуру по следующим данным: прямая AC расположена в плоскости α , прямые BE и AC компланарные. Точка Z коллинеарна точкам A и C, а точка X коллинеарна точкам B и E.

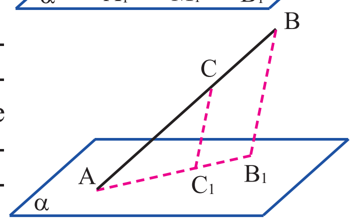
9. Объясните, почему стол с четырьмя ножками не устойчив.

10. Через середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если:

а) $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 4$ см;
б) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.



11. Конец A отрезка AB расположен на плоскости α. Из конца отрезка B и точки C, расположенной на отрезке проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 10$ см.



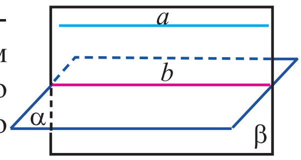
12. Дан параллелограмм ABCD и не пересекающая его плоскость α. Из вершин параллелограмма проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 7$ см.

13. Докажите, что через точку, не лежащую на прямой можно провести одну и только одну прямую параллельную данной.

Точка, прямая и плоскость в пространстве

Теорема 1. (Признак параллельности прямой и плоскости) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a, не принадлежащая плоскости α параллельна прямой b, принадлежащей этой плоскости. Через прямые a и b проведём плоскость β. Тогда плоскости α и β пересекаются по прямой b. Если прямая a пересекает плоскость α, то точка пересечения должна быть расположена на прямой b, что невозможно при $a \parallel b$. Значит $a \parallel \alpha$.

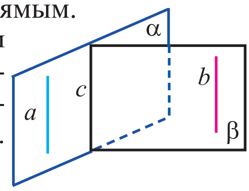


Следствие. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна этой прямой.

Следствие. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.

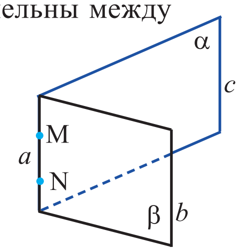
Теорема 2. Если плоскости, проходящие через две параллельные прямые пересекаются, то линия пересечения параллельна этим прямым.

Доказательство: предположим, что $a \parallel b$. Проведём плоскости α и β соответственно через прямые a и b. Обозначим линию пересечения через c. По признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$. Отсюда $a \parallel c$. Аналогично, если $b \parallel \alpha$, то $b \parallel c$.



Теорема 3. Две прямые параллельные третьей, параллельны между собой.

Доказательство: утверждение верно для прямых, лежащих в одной плоскости. Пусть прямые a, b и c не лежат в одной плоскости и $a \parallel c$, $b \parallel c$. Проведём плоскость α, через прямые a и c. Если $b \parallel c$, то $b \parallel \alpha$. Возьмём на прямой a точку M и через неё и прямую b проведём плоскость β. Линия пересечения плоскостей α и β, прямая MN, параллельна прямым b и c. Из точки M к прямой c можно провести только одну параллельную прямую. Поэтому прямые MN и a совпадают. Из того, что MN $\parallel b$, получаем $a \parallel b$.



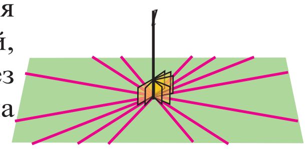
1. а) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной плоскости. Сколько таких прямых можно провести?
б) Через данную точку проведите плоскость параллельную данной прямой. Сколько таких плоскостей можно провести?

2. Одна из сторон параллелограмма лежит в плоскости α. Каково расположение остальных сторон относительно плоскости α?

3. Плоскость параллельная стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Найдите длину стороны A_1B_1, если: а) $AB = 18$ см, $AA_1 : A_1C = 2 : 1$; б) $B_1C = 6$ см, $AB : BC = 3 : 4$; в) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

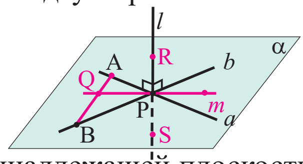
Определение. Если прямая(a), пересекающая плоскость (α), перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения, то прямая(a) перпендикулярна плоскости (α) и это записывается так: $a \perp \alpha$



Теорема 1. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости) Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

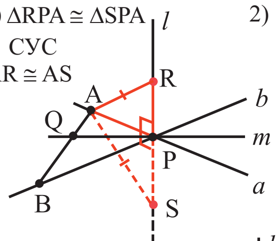
Дано. Пересекающиеся прямые a и b принадлежат плоскости α . $l \perp a$, $l \perp b$.

Доказать, что. $l \perp \alpha$

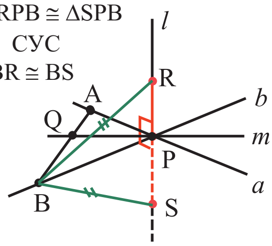


Пусть прямые a и b пересекаются в точке P, принадлежащей плоскости α и прямая l перпендикулярна точке P. Проведём в плоскости α через точку P произвольную прямую m и прямую, проходящую через точки A, B и Q, соответствующих прямых a, b *и* m. Начиная от точки P на прямой l отметим конгруэнтные отрезки PR и PS. Выполним доказательство в следующей последовательности.

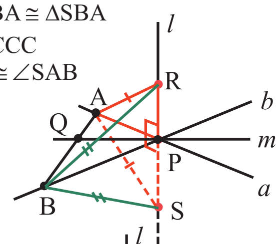
1) $\Delta RPA \cong \Delta SPA$
СУС
$AR \cong AS$



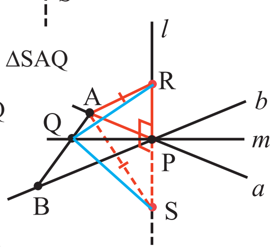
2) $\Delta RPB \cong \Delta SPB$
СУС
$BR \cong BS$



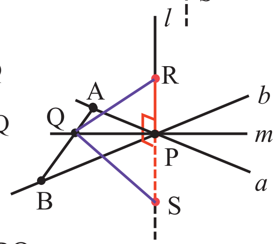
3) $\Delta RBA \cong \Delta SBA$
ССС
$\angle RAB \cong \angle SAB$



4) $\Delta RAQ \cong \Delta SAQ$
СУС
$RQ \cong SQ$



5) $\Delta RPQ \cong \Delta SPQ$
ССС
$\angle RPQ \cong \angle SPQ$



В равнобедренном треугольнике ΔRQS, отрезок PQ является и медианой и высотой. Отсюда $m \perp l$. По определению имеем $l \perp \alpha$. Теорема доказана.
По рисунку видно, что прямая перпендикулярная плоскости в точке пересечения, перпендикулярна любой прямой в данной плоскости.

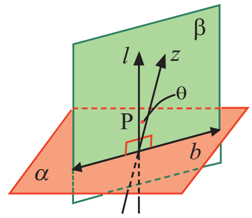
Теорема 2. Через точку на прямой можно провести перпендикулярную ей плоскость и притом только одну.

Теорема 3. Через точку на плоскости можно провести перпендикулярную ей прямую и притом только одну.

Докажем теорему 3.

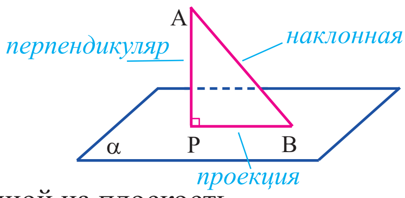
Дано. прямая l перпендикулярная плоскости α в точке P.
Доказать, что : через точку P можно провести единственную прямую l, перпендикулярную плоскости α.

Доказательство. Докажем теорему от обратного. Предположим, что существует ещё одна прямая z, перпендикулярная плоскости α в точке P. Прямые l и z лежат в плоскости β, пересекающей плоскость α вдоль прямой b. При пересечении прямых l и z образуется угол θ. По определению перпендикулярной прямой и плоскости прямая l(как и прямая z) перпендикулярна любой прямой в плоскости α, в том числе и прямой b.



Тогда и прямая l, и прямая z должны быть перпендикулярны плоскости α. Однако, это невозможно, так как $\theta + 90° + 90° > 180°$. Таким образом, через точку P в плоскости α можно провести одну и только одну перпендикулярную прямую. Если в пространстве, через точку A провести перпендикулярную прямую, которая пересекает плоскость α в точке P, то отрезок AP называется перпендикуляром из точки A к плоскости α. Отрезок, соединяющий точку A с любой точкой (отличной от точки P) в плоскости α называется наклонной.

Отрезок AP - перпендикуляр к плоскости.



Отрезок AB - наклонная.

Точка P - основание перпендикуляра,

Точка B - основание наклонной.

Отрезок BP называется проекцией наклонной на плоскость.

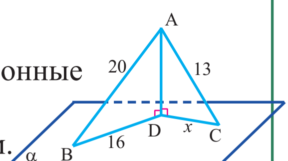
Если из точки к плоскости провести перпендикуляр и наклонную, то:

1) перпендикуляр меньше наклонной;

2) равные наклонные имеют равные проекции;

3) большая наклонная имеет большую проекцию.

Пример. Из точки на плоскость проведены две наклонные длиной 20 см и 13 см. Найдите длину меньшей проекции,если длина большей проекции равна 16 см.



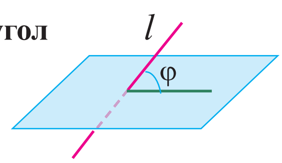
Решение: AD перпендикуляр, AB и AC наклонные. Пусть BD и CD являются проекциями наклонных. Из Δ ABD по теореме Пифагора:

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12$ (см)

Из Δ ADC по теореме Пифагора: $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см)

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на плоскость.



Угол между прямой и плоскостью не больше углов, образованных этой прямой и любой другой прямой в плоскости.

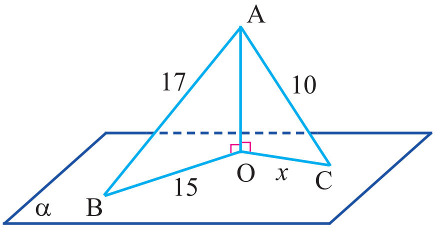
В случае, если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°.

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. Для того чтобы установить новый телефонный столб перпендикулярно поверхности земли, мастер устанавливает его перпендикулярность относительно двух пересекающихся прямых. Докажите, что мастер прав.

2. Прямая выходящая из вершины треугольника перпендикулярна двум сторонам, выходящим из этой вершины. Найдите угол между этой прямой и третьей стороной треугольника.

3. По рисунку найдите x.



4. Из точки на плоскость проведены перпендикуляр длиной 8 см и наклонная длиной 16 см. Найдите:

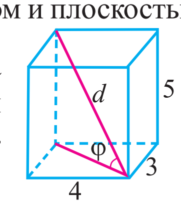
а) проекцию наклонной;

б) проекцию перпендикуляра на наклонную.

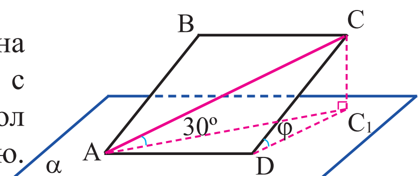
5. Концы отрезка длиной 10 см пересекающего плоскость удалены от плоскости на расстояния 5 см и 3 см. Найдите проекцию отрезка на плоскость.

6. Концы отрезка длиной 8 см пересекающего плоскость удалены от неё на расстояние 1 см и 3 см. Найдите угол между отрезком и плоскостью.

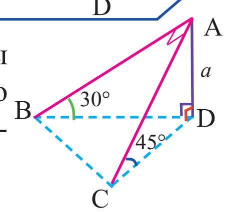
7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 4 см и 3 см, а высота 5 см. Найдите диагональ (d) и угол (φ) между диагональю и основанием параллелепипеда.



8. Сторона AD квадрата ABCD лежит на плоскости. Диагональ AC образует с плоскостью угол 30º. Найдите угол между стороной CD и этой плоскостью.



9. От точки к плоскости на расстоянии a проведены две наклонные, которые составляют с плоскостью углы 45º и 30º, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

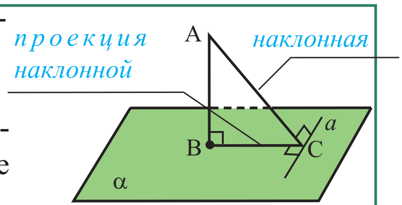


10. Из одной точки до плоскости проведены две равные наклонные, которые образуют между собой угол 60º, а их проекции образуют между собой прямой угол. Найдите угол между каждой наклонной и её проекцией.

11. Найдите длины наклонных, проведённых из данной точки к плоскости если: а) одна их наклонных на 8 см больше другой, а их проекции равны 20 см и 8 см;

б) длины наклонных относятся как 2 : 3, а проекции равны 2 см и 7 см.

Теорема о трех перпендикулярах

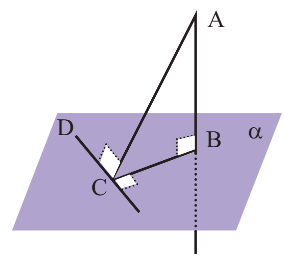


Теорема. Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.
То есть, если прямая *a*, принадлежащая плоскости α перпендикулярна прямой BC в точке C, то она перпендикулярна и прямой AC.

Краткая запись: если $a \perp BC$ и $BC \perp BA$, то $a \perp AC$

Для данной теоремы верна и обратная теорема.

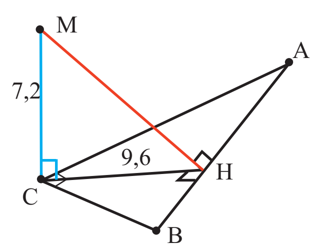
Обратная теорема. Если прямая, лежащая в плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и её проекции.
То есть, если прямая *a*, лежащая в плоскости α, перпендикулярна прямой AC в точке C , то она перпендикулярна и BC.
Краткая запись: если $a \perp AC$ и $BC \perp BA$, то $a \perp BC$



Докажем теорему.
Дано: $AB \perp \alpha$
AC наклонная, проведённая к плоскости α
отрезок BC - проекция наклонной AC.
$CD \in \alpha$, $CD \perp BC$
Доказать: $CD \perp AC$

Утверждение	**Обоснование**
$CD \perp BC$	Дано
$AB \perp CD$	Перпендикулярность прямой и плоскости
$CD \perp$ плоскости ABC	AB и BC прямые пересекающиеся на плоскости ABC и $CD \perp AB$, $CD \perp BC$
$CD \perp AC$	$CD \perp ABC$ (перпендирулярность прямой плоскости)

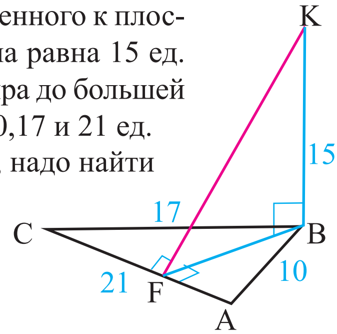
Обратную теорему докажите самостоятельно.



Пример 1. Длина перпендикуляра CM, восстановленного к вершине прямого угла прямоугольного треугольника ABC равна 7,2 единицам, а длина высоты, проведённой к гипотенузе равна 9,6 единицам. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы.

Решение: по теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $CH \perp AB$, то $MH \perp AB$. Расстояние от точки M до гипотенузы равно длине отрезка MH. Из ΔMCH по теореме Пифагора имеем:

$$MH = \sqrt{7{,}2^2 + 9{,}6^2} = 12 \text{ ед.}$$



Пример 2. Длина перпендикуляра, восстановленного к плоскости треугольника из вершины большего угла равна 15 ед. Найдите расстояние от вершины перпендикуляра до большей стороны, если стороны треугольника равны 10,17 и 21 ед.

Решение: если $BF \perp AC$, то $KF \perp AC$. То есть, надо найти длину отрезка KF.

По формуле Герона найдём площадь ΔABC.

$$p = \frac{(a+b+c)}{2} = \frac{(10+17+21)}{2} = 24$$

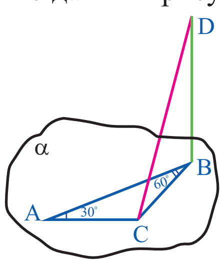
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$\sqrt{24\cdot(24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{24\cdot14\cdot7\cdot3} = \sqrt{3\cdot8\cdot2\cdot7\cdot7\cdot3} = \sqrt{3^2\cdot7^2\cdot4^2} = 84$$

С другой стороны, $S = \frac{1}{2}\ AC \cdot BF$. Отсюда $BF = \frac{2\cdot S}{AC} = \frac{2\cdot 84}{21} = 8$

Так как отрезок KB перпендикулярен BF, то ΔKBF прямоугольный.

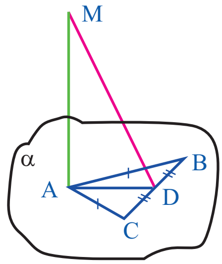
$KF = \sqrt{KB^2 + BF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

1. По данным рисунка докажите утверждения.



$DB \perp (ABC)$

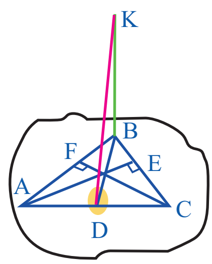
$DC \perp AC$



$AMD \perp (ABC)$

$AB = AC$, $CD = DB$

$MD \perp BC$



$KB \perp (ABC)$

AE, CF, - высоты

$KD \perp AC$

2. Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, к плоскости треугольника восстановлен перпендикуляр, длиной 4 см. Найдите расстояние от вершины перпендикуляра до сторон треугольника.

3. Точка M, лежащая вне плоскости прямоугольного треугольника ABC с катетами 6 см и 8 см, равноудалена от его вершин. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если $MA = MB = MC = 13$ см.

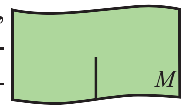
4. Точка M, лежащая вне плоскости равностороннего треугольника со стороной 3 см, находится на расстоянии $\sqrt{3}$ см от его плоскости и на равном расстоянии от его сторон. Найдите это расстояние.

5. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см, если расстояние от этой точки до сторон равно 5 см.

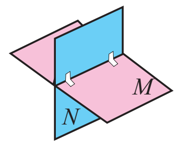
Угол между двумя плоскостями. Двугранный угол

Практическая работа. Сгибание листа бумаги.

Возьмите два листа бумаги и пометьте один из них буквой M, а другой буквой N. Каждый лист разрежьте до середины.Соедините листы между собой, при помощи клейкой ленты. Выполните следующие задания.



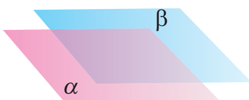
1. Отметьте такие точки D и E, чтобы они принадлежали обеим плоскостям.
2. Проведите через точки D и E прямую.
3. Выразите своё мнение о пересечении плоскостей.



Взаимное расположение плоскостей

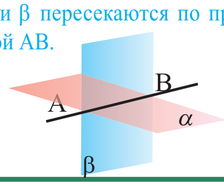
Параллельные плоскости

У параллельных плоскостей нет ни одной общей точки.



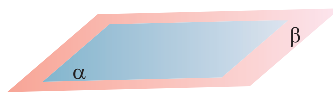
Пересекающиеся плоскости

Две плоскости пересекаются по одной прямой. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB.

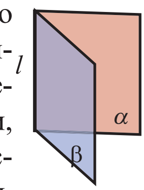


Плоскости совпадают

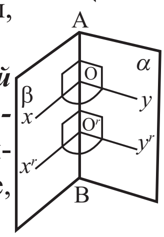
У двух плоскостей есть три общие точки, не расположенные на одной прямой.



Угол, образованный двумя полуплоскостями и имеющий общую границу называется **двугранным углом**. Полуплоскости называются гранями, их общая граница называется ребром. При пересечении двух плоскостей образуется 4 двугранных угла. Если, из любой точки на ребре двугранного угла, в каждую полуплоскость провести перпендикулярные лучи, то они образуют угол, который называется линейным углом двугранного угла.



Двугранный угол измеряется его линейным углом. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Все линейные углы двугранного угла при параллельном переносе совпадают, то есть они равны (прямые, перпендикулярные одной и той же прямой параллельны).

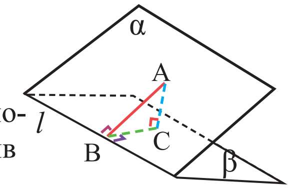


Значение линейного угла не зависит от места расположения его вершины.

Градусная мера двугранного угла лежит в пределах от 0° до 180°.

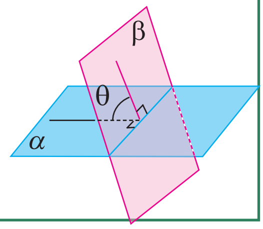
Пример 1. На грани двугранного угла, градусная мера которого равна 30°, взята точка, удалённая от другой грани на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

Решение. Пусть дана точка $A \in \alpha$. Проведём $AB \perp l$, $AC \perp \beta$. По теореме о трёх перпендикулярах $BC \perp l$. Значит, $\angle ABC$ линейный угол и $\angle ABC = 30°$. В прямоугольном треугольнике ABC катет, лежащий напротив угла 30° равен половине гипотенузы: $AC = \dfrac{AB}{2}$. Отсюда $AB = 2a$.

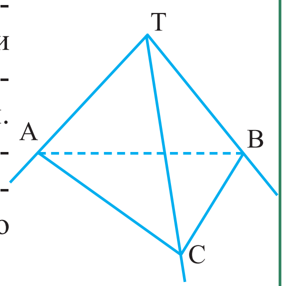


Угол между двумя плоскостями. Двугранный угол

Углом между двумя пересекающимися плоскостями принято считать меньший из двух углов, образованных при пересечении плоскостей. На рисунке, говоря об угле между плоскостями α и β имеют ввиду угол θ, образованный перпендикулярными прямыми, опущенными на линию пересечения плоскостей.



Изобразим треугольник ABC и лучи TA, TB и TC, из точки T вне плоскости треугольника. Точка T является общей вершиной для углов $\angle ATC$, $\angle ATB$ и $\angle BTC$, не расположенных в одной плоскости. Полученная фигура называется трёхгранным углом. Плоские углы называются гранями, стороны называются рёбрами, общая вершина называется вершиной трёхгранного угла. Каждое ребро, в свою очередь, также является ребром двугранного угла.



Теорема 1. Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360^o.

Теорема 2. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Пример 2. Существует ли трёхгранный угол с плоскими углами:
а) 130^o, 100^o, 140^o ; б) 70^o, 80^o, 100^o?

Решение: а) нет, так как $130^o+100^o+140^o= 370^o > 360^o$
б) да, так как $70^o+80^o+100^o < 360^o$ и каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

1. Приведите пример двугранного угла и трёхгранного угла в классной комнате. Чему, приблизительно, равна градусная мера плоских и двугранных углов?

2. Существуют ли трёхгранный угол с плоскими углами?
а) 30^o; 70^o; 50^o б) 120^o; 150^o; 100^o в) 60^o; 100^o; 170^o?

3. На грани двугранного угла, градусная мера которого равна 45^o, взята точка, удалённая от другой грани на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу, если она образует с плоскостью треугольника угол 30^o.

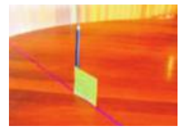
5. Два плоских угла трёхгранного угла равны 45^o, а третий 60^o. Найдите двугранный угол, расположенный напротив третьего плоского угла.

6. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 18, BC = 12, AC = 10. Через сторону AC проведена плоскость α, которая составляет угол 45^o с плоскостью треугольника. Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

Перпендикулярные плоскости

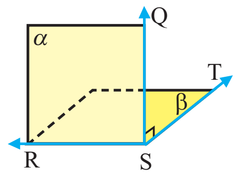
Практическая работа

Прикрепите листок бумаги к карандашу при помощи клейкой ленты. Карандаш есть модель прямой, а листок - модель плоскости. Расположите карандаш различным образом относительно стола и выскажите мнение по поводу двугранного угла, образованного плоскостью листа и плоскостью стола.

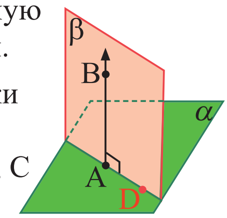


Определение. Если двугранный угол, образованный при пересечении двух плоскостей прямой, то плоскости называются перпендикулярными плоскостями.

$SQ \perp SR$ на плоскости α и $TS \perp SR$ на плоскости β и $\angle QST$ равен линейному углу двугранного угла с ребром RS и гранями α и β. Если $\angle QST$ прямой, то $\alpha \perp \beta$.



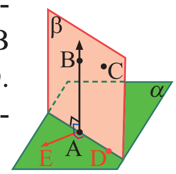
Теорема (признак перпендикулярности плоскостей). Если плоскость проходит через прямую перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Дано: Прямая AB перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость α . Точка C не лежит в плоскости α.

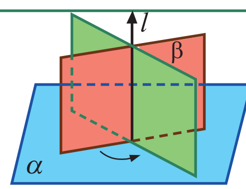
Доказать: Плоскость β, проходящая через точки A, B, C перпендикулярна плоскости α.

Доказательство: Обозначим прямую, по которой пересекаются плоскости α и β через AD . Эта прямая является ребром двугранного угла, образованного данными плоскостями.В плоскости α проведём линию AE перпендикулярную AD. Так как $AB \perp \alpha$, то линия AB перпендикулярна любой прямой пересекающей её в точке A.

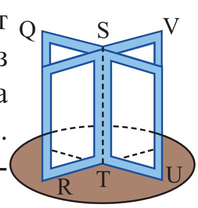


То есть, $AB \perp AD$, $AB \perp AE$. Угол $\angle BAE$ является линейным углом двугранного угла. А так как $AB \perp AE$, то двугранный угол прямой. Таким образом $\beta \perp \alpha$. Теорема доказана.

Можно смоделировать любую плоскость, проходящую через прямую l вращением плоскости β вокруг прямой l.



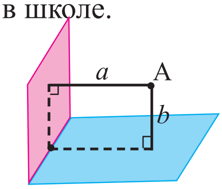
Пример прикладного задания. Примером перпендикулярных плоскостей служит крутящиеся двери, которые обычно устанавливают при входе в отелях или торговых центрах. Из схемы видно, что прямая ST перпендикулярна полу и дверь крутиться вокруг этой прямой. При этом плоскости STU, STR также перпендикулярны плоскости пола RTU.



Перпендикулярные плоскости

7. Покажите примеры перпендикулярных плоскостей и обоснуйте их перпендикулярность из того, что вы видите дома и в школе.

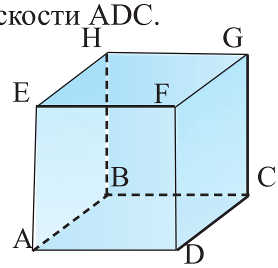
8. Точка расположена на расстоянии a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки, до линии пересечения плоскостей.



9. а) Запишите рёбра куба, перпендикулярные плоскости ADC.

б) Каким плоскостям перпендикулярно ребро AE? Запишите доказательство при помощи теоремы перпендикулярности прямой и плоскости.

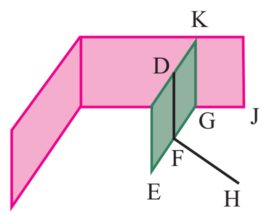
в) Запишите тройку перпендикулярных плоскостей. Объясните их перпендикулярность, используя изученные теоремы.



10. Представьте, что вы разделили классную комнату на две части перегородками, как показано на рисунке. Мастер, который вам помогает, нарисовал мелом прямую линию DF на перегородке, и линию FH на полу.

а) Как вы при помощи этих линий и угольника, по модели перегородки сможете определить перпендикулярность плоскости EFD и плоскости пола EFH?

б) Как вы убедитесь в том, что перегородка перпендикулярна стене (KGJ) ?



11. а) Нарисуйте плоскость NML и прямую AM, перпендикулярную плоскости.

б) Нарисуйте три плоскости, проходящие через прямую AM и перпендикулярные плоскости NML.

12. Какое из утверждений верно, а какое неверно?

а) Из любой точки на прямой можно провести перпендикуляр и притом только один.

б) Если точка A лежит в плоскости α, а точка B лежит в плоскости β, то никакая другая точка прямой AB не может лежать в плоскости α.

в) Если каждая из двух пересекающихся плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то эти плоскости перпендикулярны между собой.

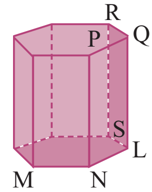
г) Если прямая AB перпендикулярна плоскости α в точке A и прямая AB лежит в плоскости β, то $\alpha \perp \beta$.

д) Через точку на прямой можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой.

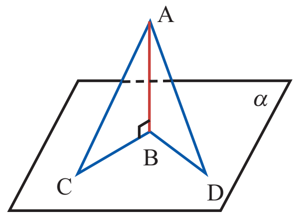
е) Если плоскость перпендикулярна одной из пересекающихся прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

Перпендикулярные плоскости

13. а) Покажите какой ещё плоскости перпендикулярна плоскость MNL, если PN перпендикулярна плоскости MNL?
б) Какая прямая должна быть перпендикулярна плоскости MNL, чтобы и плоскость RSL, и плоскость PNL, были перпендикулярны плоскости MNL?



14. Прямая AB перпендикулярна плоскости α в точке B. Отрезки BC и BD, принадлежащие плоскости α конгруэнтны $BC \cong BD$. Докажите, что $AC \cong AD$ заполнив двухстолбчатую таблицу. Доказательство запишите в тетрадь.



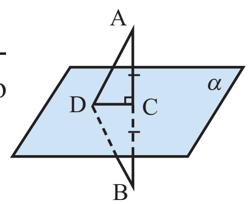
Дано: $AB \perp \alpha$, $BC \cong BD$ C и $D \in \alpha$
Доказать: $AC \cong AD$

Утверждение	Обоснование
1. $AB \perp \alpha$, $BC \cong BD$, C və $D \in \alpha$	1. Дано
2. $AB \perp BC$, $AB \perp BD$	2. ....
3.Углы $\angle ABC$ и $\angle ABD$ прямые	3. По определению перпендикуляра
4. $\angle ABC \cong \angle ABD$	4. Оба угла прямые
5. $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	5. ....
6. $AC \cong AD$	6. ....

15. Равносторонний треугольник ABC расположен в плоскости α. Отрезок AD перпендикулярен плоскости α . Докажите, что $BD \cong CD$.

16. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB расположены в перпендикулярных плоскостях. Найдите CD, если $AB = 16$ см, $AC = BC = 17$ см и $AD \perp BD$.

17. Отрезок AB перпендикулярен плоскости α, пересекает плоскость в точке C и $AC \cong CB$. Докажите, что любая точка, расположенная на плоскости α, находится на одинаковом расстоянии от точек A и B.

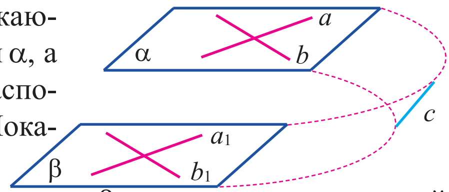


18. Из точек A и B. расположенных в перпендикулярных плоскостях, до прямой пересечения проведены перпендикуляры AC и BD. Найдите длину отрезка AB, если:
а) $AC = 8$ см, $BD = 9$ см, $CD = 12$ см;
б) $AD = 4$ м, $BC = 14$ м, $CD = 2$ м;
в) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$

Параллельные плоскости

Теорема 1. (Признак параллельности плоскостей) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

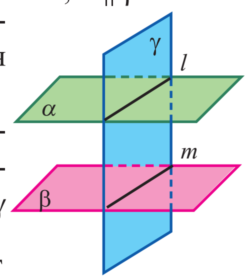
Доказательство: Пусть, две пересекающиеся прямые a и b лежат в плоскости α, а две пересекающиеся прямые a_1 и b_1 расположены в плоскости β и $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Покажем, что $\alpha \parallel \beta$.



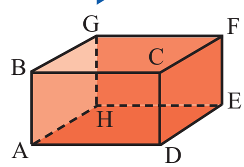
Предположим обратное. Пусть, плоскости α и β пересекаются по прямой c. По признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Отсюда следует, что прямая c параллельна каждой из пересекающих её прямых a и b. А это невозможно. Получили противоречие. Значит, $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 2. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны.

То есть, если параллельные плоскости α и β пересекаются плоскостью γ, то линии пересечения l и m параллельны. Краткая запись: если $\alpha \parallel \beta$ плоскость γ пересекает плоскости α и β, то $l \parallel m$



Пример прикладного задания. Плоскости ABG и DCF прямоугольного параллелепипеда параллельны. Какие плоскости образуют рёбра, пересекая эти плоскости?



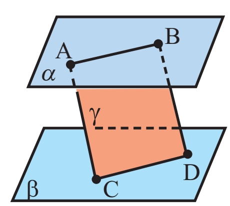
Решение: 1. Плоскость ABC, пересекая параллельные плоскости ABG и DCF, образует параллельные рёбра AB и CD: AB || CD. 2. Плоскость HGF, пересекая плоскости ABG и DCF образует параллельные рёбра GH и FE: GH || FE.

Доказательство теоремы:

Дано: $\alpha \parallel \beta$. Пусть прямая l является линией пересечения плоскостей γ и α , прямая m является линией пересечения плоскостей γ и β.

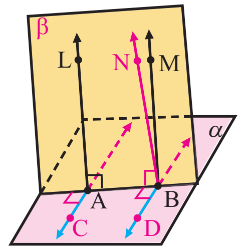
Доказать: $m \parallel l$

Доказательство: так как прямые m и l лежат в плоскости γ, то они не являются скрещивающимися, а также не пересекающимися, так как в этом случае плоскости α и β имели бы общую точку. На самом деле, если прямые l и m пересекаются в какой-либо точке, то эта точка должна принадлежать как прямой l, то есть лежать в плоскости α , так и прямой m, то есть в плоскости β. Однако, плоскости α и β параллельны, а значит они не имеют ни одной общей точки. Значит $m \parallel l$. Теорема доказана.



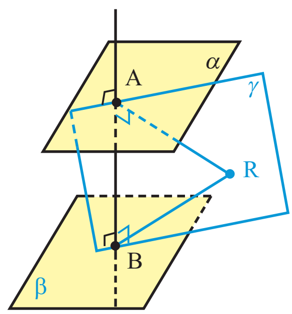
Теорема 3. Отрезки параллельных прямых, расположенных между двумя параллельными плоскостями равны (докажите самостоятельно).

Теорема 4. Две прямые перпендикулярные одной плоскости параллельны.



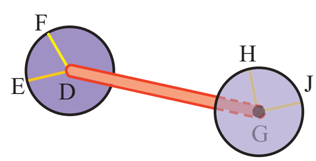
Дано: плоскость α , $LA \perp \alpha$, $MB \perp \alpha$
Докажите: $LA \parallel MB$
Для доказательства теоремы проведём прямую BN, параллельно прямой LA. Надо показать, что прямые BN и BM совпадают.
Докажите теорему, выполнив следующее.
1. Покажите, что $\angle LAC$ является линейным углом прямого двугранного угла между плоскостями α и β.
2. Покажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей, то другая прямая также перпендикулярна этой прямой, то есть из условия $LA \perp AB$ следует, что $NB \perp AB$.
3. На плоскости α проведите $BD \perp AB$. Используя то, что двугранный угол между плоскостями α и β прямой, покажите, что $BD \perp NB$.
4. Покажите, что перпендикуляр MB к плоскости α восстановленный из точки B является единственным.

Теорема 5. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой параллельны.
Доказательство теоремы:



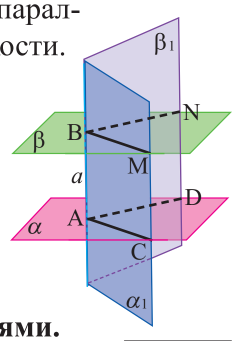
Дано: $\alpha \perp AB$, $\beta \perp AB$.
Докажите: $\alpha \parallel \beta$
Доказательство: Допустим обратное. Пусть, точка R принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β. Плоскость γ, проходит через точки A, B и R. Для плоскости γ имеем: $RB \perp AB$, $RA \perp AB$. Однако, прямые перпендикулярные одной и той же прямой в плоскости должны быть параллельны. Значит, предположение, что плоскости α и β пересекаются, ложно. Эти плоскости параллельны: $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

Пример прикладного задания. Керим делает из картона модель автомобиля. Ось DG,соединяющая колёса автомобиля должна быть перпендикулярна. По какой линии должна быть перпендикулярна ось, чтобы колёса были параллельны?



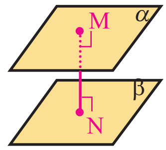
Решение: если ось DG перпендикулярна пересекающимся в плоскости EFD прямым ED и FD и пересекающимся в плоскости HGJ прямым HG и GJ, то Керим может быть уверен, что колёса параллельны.

Параллельные плоскости

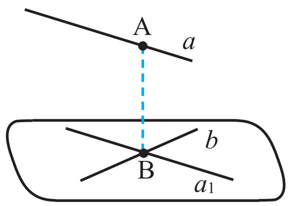


Теорема 6. Прямая перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

Доказательство. Пусть $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$. Плоскости α_1 и β_1, проходящие через прямую a пересекаются с плоскостями α и β по параллельным прямым : $AC \parallel BM$, $AD \parallel BN$. Так как $a \perp AC$, $a \perp AD$, то $a \perp BM$ и $a \perp BN$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $a \perp \beta$. Теорема доказана.

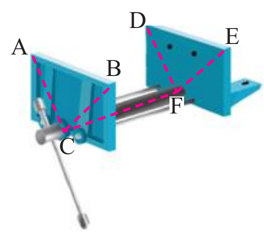


Расстояние между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между двумя плоскостями, равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости до другой.



Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой. Например, проведём через прямую b плоскость, параллельную прямой a. Для этого, проведем прямую a_1, которая пересекает прямую b так, чтобы она прошла параллельно прямой a. Плоскость, проходящая через прямые a_1 и b, параллельна прямой a. Расстояние, от любой точки прямой a до этой плоскости, равно расстоянию между скрещивающимися прямыми a и b. Если $b \cap a_1 = B$, то отрезок AB, перпендикулярный плоскости α, является общим перпендикуляром для скрещивающихся прямых a и b.

1. Плотники и сантехники для обработки деталей помещают их между двумя параллельными пластинами (зажимами), плотно сжимающих деталь, а затем выполняют необходимую работу. Какие линии на рисунке должны быть перпендикулярны, чтобы пластины были параллельны?



2. Прямая AB параллельна плоскости α и перпендикулярна плоскости β. Прямая CD лежит в плоскости β.

а) Нарисуйте рисунок по условию.

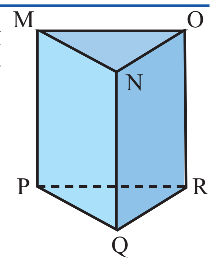
б) Что из следующего верно?

а) $\alpha \parallel \beta$ б) $\alpha \perp \beta$ в) $AB \parallel CD$ г) $CD \perp \alpha$

3. Изобразите заданные условия при помощи рисунка.
Плоскости α и β пересекаются вдоль прямой CD. Прямая AB пересекает CD в точке E. Точки A, B, C, D, E лежат в одной плоскости.

Параллельные плоскости

4. Плоскости MNO и PQR параллельны. Можно ли утверждать, что, если MP || NQ || QR, то NO = QR? Ответ обоснуйте.



5. При помощи рисунка, обоснуйте, истинно или ложно высказывание.

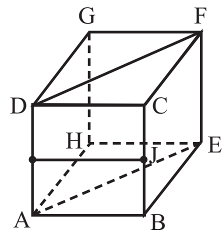
а) Если две плоскости перпендикулярны, то прямая параллельная одной из плоскостей перпендикулярна другой плоскости.

б) Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

в) Прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

г) Две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

д) Если скрещивающуюся прямая параллельна одной из двух параллельных прямых, то она скрещивается и с другой прямой.

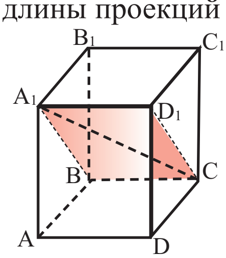


6. Основание BC равнобедренного треугольника ABC лежит в плоскости α. Плоскость β, параллельная плоскости α, пересекает сторону AB в точке D и AC в точке E. Докажите, что ΔADE равнобедренный.

7. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8 см. Концы отрезка длиной 10 см опираются на эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую плоскость.

8. Между двумя параллельными плоскостями α и β проведены отрезки AC и BD ($A,B \in \alpha$; $C,D \in \beta$). AC = 17 см, BD = 10 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 21 см. Найдите длины проекций и расстояние между плоскостями.

9. Дано: прямоугольный параллелепипед, AB = AD = 15 см, AA_1 = 20 см. Найдите расстояние между прямой A_1C и прямой, содержащей AD.
Указание: через диагональ AC проведите плоскость параллельную AD.



10. Между двумя параллельными плоскостями проведены перпендикуляр длиной 4 м и наклонная, длиной 6 м. Расстояние между их концами на каждой из двух плоскостей равно 3 м. Найдите расстояние от середины перпендикуляра до середины наклонной.

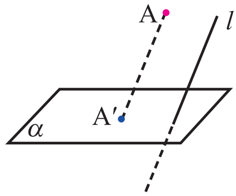
11. Концы отрезка прямой удалены от плоскости на расстоянии a и b ($a > b$). Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости, если:
а) отрезок не пересекает плоскость; б) отрезок пересекает плоскость.

12. Концы отрезка прямой, не пересекающего плоскость, удалены от плоскости на расстояния 15 см и 25 см. Точка делит отрезок как 3 : 7. Найдите расстояние от этой точки до плоскости (рассмотрите два случая).

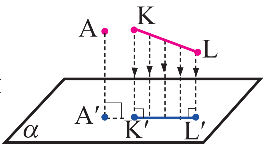
Проекции. Решение задач

Для уточнения форм, при изготовлении хозяйственных товаров, промышленного оборудования, машин и механизмов, используют рисунки с различных сторон.

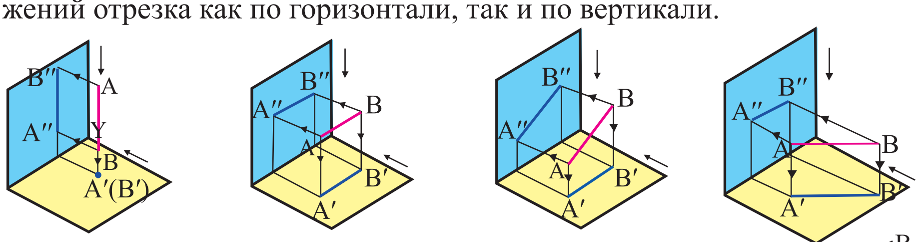
Для изображении фигур в пространстве используют параллельное проецирование. Возьмём любую прямую l, пересекающую плоскость α . Тогда точка A′ будет являться точкой пересечения плоскости с прямой, содержащей точку A при переносе этой точки параллельно прямой l. По аналогичному правилу можно получить изображение каждой точки фигуры.



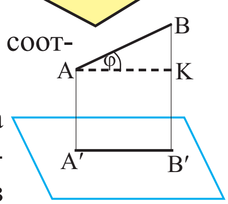
В этом случае параллельные отрезки фигуры изображаются параллельными отрезками и сохраняется их отношения. В частном случае, если прямая l перпендикулярна плоскости α, то полученное изображение фигуры является **ортогональной проекций.**



На рисунке показан пример ортогональной проекции различных положений отрезка как по горизонтали, так и по вертикали.

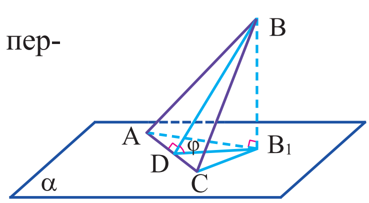


Для нахождения длины проекции отрезка используют соотношение $A'B' = AB\cos\varphi$.



Найдём площадь ортогональной проекции ΔABC на плоскость α, если угол φ является углом между и плоскостью треугольника и плоскостью, проходящей через сторону AC.

Если $BD \perp AC$, $BB_1 \perp \alpha$, то по теореме о трёх перпендикулярах $B_1D \perp AC$.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ Из ΔBB_1D $\cos\varphi = \frac{B_1D}{BD}$,

Зная , что $B_1D = BD \cdot \cos\varphi$

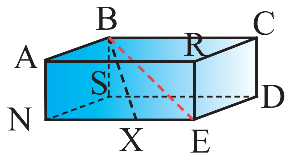
$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1D = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$

В общем случае, если угол φ - угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции, то справедлива формула $S_п = S_ф \cdot \cos\varphi$. Здесь $S_ф$ - площадь многоугольника, $S_п$ - площадь ортогональной проекции.

Проекции. Решение задач

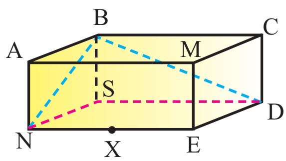
Пример. Прямоугольный параллелепипед освещен сверху. Начертите проекции заданных отрезков на плоскость основания.

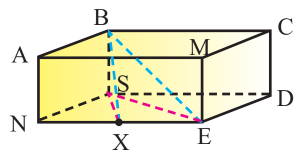
а) BD б) NB в) BE г) BX



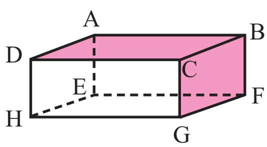
Проекции на плоскость основания:

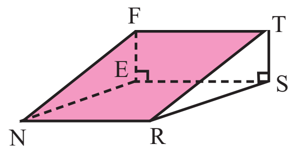
а) Проекции BD соответствует SD. в) Проекции BE соответствует SE.
б) Проекции NBсоответствует NS. г) Проекции BX соответствует SX.

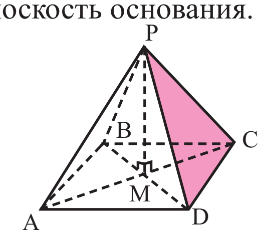




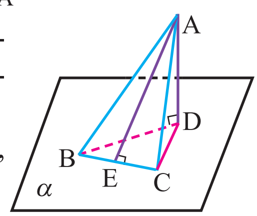
1. Раскрасьте проекции закрашенных частей на плоскость основания.



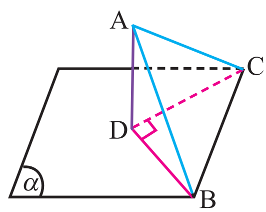




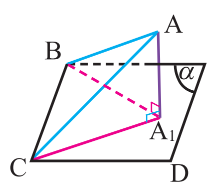
2. Ортогональной проекцией равнобедренного треугольника CAB на плоскость α является равносторонний треугольник.
Если $AD \perp \alpha$, $AE \perp BC$, $S_{\Delta CAB} = 48$ см^2, AE = 16 см, то найдите площадь ΔBCD.



3. Ортогональная проекция равностороннего треугольника ABC на плоскость α есть прямоугольный треугольник BDC. Найдите DC, если AC = 8 см.



4. Угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью α равен 30°. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость α, если BC = 12 см, $AA_1 \perp \alpha$ и $AA_1 = 8$ см.

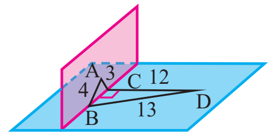


5. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника, если угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции равен:

а) 30°; б) 45°; в) 60°.

Обобщающие задания

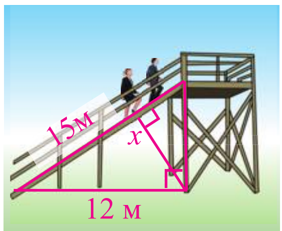
1. Выполните задания по рисунку.



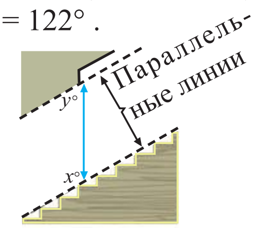
а) Покажите,что треугольник ABC является прямоугольным треугольником.

б) Измените данные на рисунке так, чтобы треугольник BCD снова стал прямоугольным, а треугольник ABC перестал быть прямоугольным.

2. По рисунку найдите x.



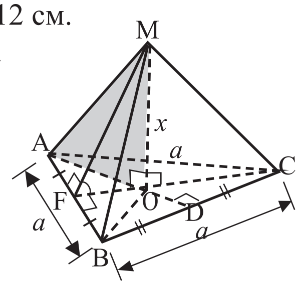
3. Перила лестницы параллельны потолку. Найдите y, , если $\angle x = 122°$.



4. Из центра равностороннего треугольника со стороной 6 см к плоскости треугольника восстановлен перпендикуляр длиной 3 см. Найдите расстояние от вершины перпендикуляра до стороны треугольника..

5. Расстояние от точек A и B до плоскости соответственно равны a и b, а расстояние между основаниями перпендикуляров на плоскость равно c. Принимая во внимание, что точки A и B могут быть расположены как с одной, так и с разных сторон от плоскости, найдите и вычислите длину AB, при $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 12$ см.

6. Длина стороны равностороннего треугольника равна a. Длина перпендикуляра OM, восстановленного из центра O к плоскости треугольника, равна x.



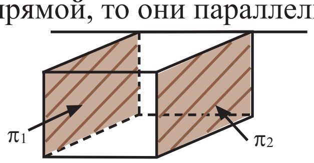
а) Докажите, что $MA \perp BC$.

б) Чему должно быть равно $OM = x$, чтобы двугранный угол между плоскостями ABM и ABC был равен 60°?

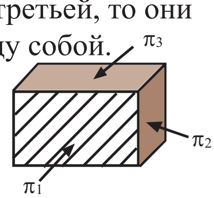
в) Чему должно быть равно $OM = x$, чтобы отрезки MA, MB, MC были взаимно перпендикулярны?

7. Определите по рисункам, что из указанного ниже истинно, а что ложно. Нарисуйте рисунки в тетрадь и запишите решение.

1. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.



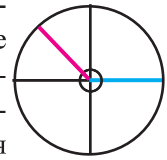
2. Если каждая из двух плоскостей перпендикулярна третьей, то они параллельны между собой.



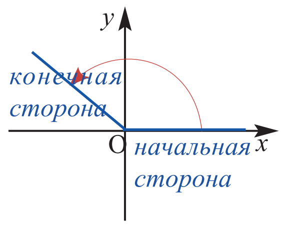
3 Тригонометрические функции произвольного угла

Угол поворота

Угол поворота



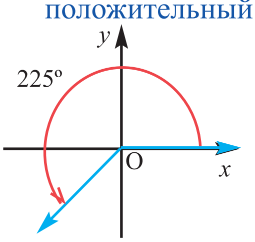
До недавнего времени говоря об угле мы имели в виду угол, полученный между двумя неподвижными сторонами. Угол также можно рассматривать как измерение поворота. Например, радиус колеса, расположеного по горизонтали при вращении вокруг неподвижной оси, через определённое время относительно начального положения образует некоторый угол. К тому же значение угла зависит от направления поворота. Любой угол можно рассматривать как фигуру, полученную вращением луча вокруг начальной точки.



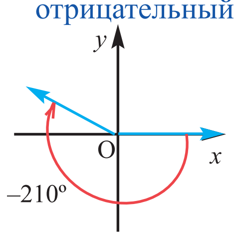
Начальное положение луча соответствует одной стороне угла, конечное положение - другой стороне. При вращении луча на координатной плоскости относительно начала координат в направлении по часовой стрелке или против часовой стрелки, можно получить различные углы.

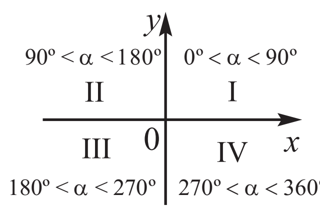
Начальная сторона угла поворота совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Сторону, полученную при вращении относительно начала координат (вершины угла), назовём конечной стороной. Принято считать, что если поворот происходит в направлении против часовой стрелки, то угол имеет положительное значение, при повороте в направлении по часовой стрелке, угол имеет отрицательное значение.

положительный угол

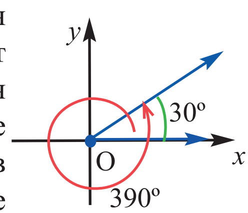


отрицательный угол





Координатные оси разбивают координатную плоскость на 4 четверти. Значение угла, в зависимости от того, в какой четверти расположена его конечная сторона, меняется в определенном интервале.

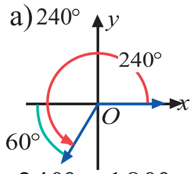


Конечная сторона угла может совершить один или несколько оборотов относительно начала координат. Один полный оборот соответствует углу 360°. Существует бесконечное число углов поворота, у которых начальная и конечная стороны совпадают. Например, конечные стороны углов 30°и 390° совпадают. В общем, для углов поворота α° и $\alpha^\circ + 360^\circ \cdot n$ (здесь n произвольное целое число) конечные стороны совпадают.

Радианная и градусная мера угла

Пример 1. Нарисуйте угол заданной величины. Определите какой четверти принадлежит конечная сторона угла.

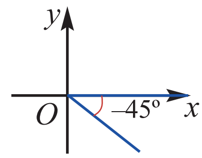
а) 240°



$240° = 180° + 60°$

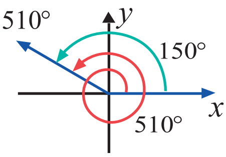
Знак угла положительный. Угол изображается поворотом, относительно начала координат, в направлении против часовой стрелки на угол $180° + 60°$. Конечная сторона расположена в III четверти.

б) –45°



Знак угла отрицательный. Угол изображается поворотом, относительно начала координат, в направлении по часовой стрелке на угол 45° от положительного направления оси абсцисс. Конечная сторона расположена в IV четверти.

в) 510°

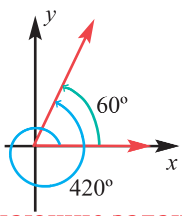


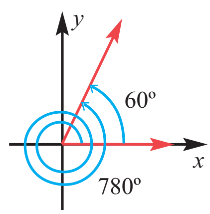
$510° = 360° + 150°$

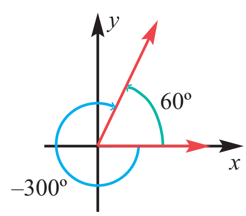
Угол изображается поворотом,относительно начала координат, в направлении против часовой стрелки на угол 150°. Конечная сторона расположена во II четверти.

Пример 2. На координатной плоскости покажите и запишите градусные меры двух положительных и одного отрицательного угла поворота, конечные стороны которых совпадают с конечной стороной угла 60°.

$60° + 360° = 420°$ $\quad$ $60° + 2 \cdot 360° = 780°$ $\quad$ $60° - 360° = -300°$







Обучающие задания

1. Изобразите какой четверти принадлежит угол α ?

а) $\alpha = 170°$ б) $\alpha = 290°$ в) $\alpha = -100°$ г) $\alpha = 320°$ д) $\alpha = -10°$

2. Покажите такой угол поворота α в промежутке от 0° до 360°, конечные стороны которого совпадают с заданным углом.

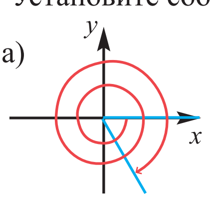
а) 420° б) –210° в) –330° г) 700° д) –200°

3. Для заданного угла запишите и нарисуйте один положительный и один отрицательный угол так, чтобы их конечные стороны совпадали.

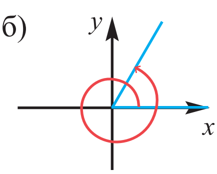
а) 200° б) 80° в) –100° г) 130° д) –70°

4. Установите соответствие углов и рисунков? 1) –210° 2) 420° 3) – 780°

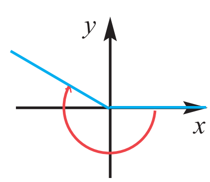
а)



б)



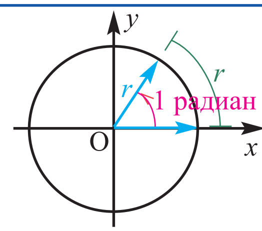
в)

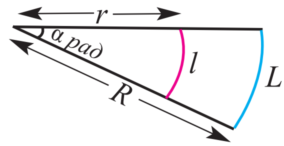


Радианная и градусная мера угла

Радианное измерение углов

Угол в один радиан-это центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу. Радианная мера угла есть отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности: $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{r}}$. Величина угла, выраженная в радианах не зависит от длины радиуса (объясните, воспользуясь подобием фигур на рисунке).





Пример 1. Сколько радиан составляет центральный угол, длина дуги которого равна 12 см, если радиус окружности равен 4 см?

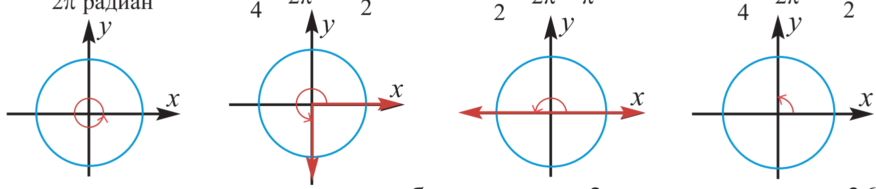
Решение: 1 радиан соответствует длине дуги 4 см.
Дуге длиной 12 см будет соответствовать угол 12 : 4 = 3 радиан.
Длина окружности $2\pi r$. Если центральный угол, соответствующий дуге окружности радиуса (r) равен 1 радиану, то дуге, равной $2\pi r$, соответствует центральный угол 2π. Ниже показаны радианные меры углов поворота.

полный поворот: 2π радиан

поворот на 3/4: $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

поворот на 1/2: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$

поворот на 1/4: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$



Радианная мера одного целого оборота равна 2π, градусная мера $360°$. То есть, 2π радиан $= 360°$. Отсюда можно установить следующую связь между радианной и градусной мерой.

Преобразование радиан в градусы:

$$2\pi \text{ радиан} = 360°$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

$$1 \text{ радиан} \approx 57°$$

Преобразование градусов в радианы:

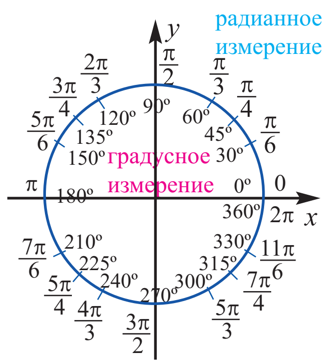
$$2\pi \text{ радиан} = 360°$$

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175 \text{ радиан}$$

Таким образом, π рад $= 180°$. Обозначение “рад” часто опускают. Вместо π рад $= 180°$ обычно пишут $\pi = 180°$. Отсюда получаем, что

$\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$



Используя соответствующие радианные и градусные меры углов, расположенных в первой четверти, можно найти увеличенные в разы значения других углов.

Например, если $30° = \frac{\pi}{6}$, тогда $150° = \frac{5\pi}{6}$.

Пример 2. Выразите углы, заданные в градусах радианами, а углы, заданные радианами в градусах. а) $60°$; б) $\frac{5\pi}{3}$

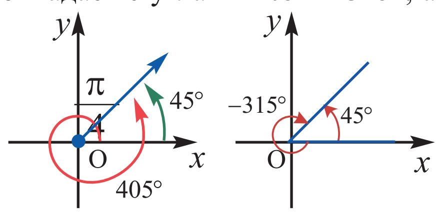
Решение.

а) $60°$ $\qquad 60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$ радиан $= \frac{\pi}{3}$ радиан $\approx 1{,}047$ радиан

б) $\frac{5\pi}{3}$ $\qquad \frac{5\pi}{3}$ радиан $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 5 \cdot 60° = 300°$

Пример 3. Выразите углы, конечная сторона которых совпадает с углом $45°$, в градусах и радианах.

Решение: Конечная сторона угла $45°$совпадает с углами $405°$ и $315°$, а также существует бесконечно много углов, конечные стороны которых совпадают с конечной стороной угла $45°$: $405° = 45° + 360°$; $-315° = 45° - 360°$, $45° + 2 \cdot 360°$, $45° - 2 \cdot 360°$; $45° + 3 \cdot 360°$, $45° - 3 \cdot 360°$ или $45° \pm 360°$, $45° \pm 2 \cdot 360°$, $45 \pm 3 \cdot 360°$.



В радианах это можно записать как $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \pm 4\pi$ и т.д. Все углы, конечные стороны которых совпадают с углом $\frac{\pi}{4}$ в общем виде записываются так: $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n$ ($n \in N$).

Обучающие задания

5. Найдите радианную меру угла, соответствующую дуге окружности радиуса r и длиной l.

а) $r = 4$ см, $l = 16$ см $\quad$ б) $r = 5$ м, $l = 4$ м $\quad$ в) $r = 3{,}2$ м, $l = 7{,}2$ м

6. Изобразите на координатной плоскости следующие углы поворота.

а) $40°$ $\quad$ б) $310°$ $\quad$ в) $-150°$ $\quad$ г) $150°$ $\quad$ д) $780°$

е) $\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ ж) $-\pi$ $\quad$ з) $\frac{5\pi}{2}$ $\quad$ и) $-400°$ $\quad$ к) $\frac{3\pi}{2}$

7. Углы, заданные в градусах, выразите в радианах. Ответ округлите до сотых.

а) $60°$ $\quad$ б) $120°$ $\quad$ в) $45°$ $\quad$ г) $450°$ $\quad$ д) $-270°$ $\quad$ е) $15{,}5°$

8. Углы, заданные в радианах, выразите в градусах.

а) $\frac{\pi}{6}$ $\quad$ б) $\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ в) $-\frac{3\pi}{8}$ $\quad$ г) $-\frac{5\pi}{2}$ $\quad$ д) 1 $\quad$ е) 2 $\quad$ ж) 3

9. Запишите все углы, принадлежащие заданному промежутку, конечные стороны которых совпадают с заданным углом.

а) $65°$, $90° \le \theta < 720°$ $\quad$ б) $-40°$, $-180° \le \theta < 360°$ $\quad$ в) $1\,40°$, $-720° \le \theta < 720°$

г) $\frac{\pi}{4}$, $-2\pi \le \theta < 2\pi$ $\quad$ д) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$ $\quad$ е) $\frac{2\pi}{3}$, $-2\pi \le \theta < 4\pi$

Пример. а) $65°$, $90° \le \theta < 720°$

Все углы поворота, конечные стороны которых совпадают с углом $65°$ можно найти по формуле $65° + 360 \cdot n$ и $65° - 360 \cdot n$.

$n = 1$ $\quad 65° + 360 \cdot 1 = 425° \quad 65° - 360 \cdot 1 = -295°$

$n = 2$ $\quad 65° + 360 \cdot 2 = 785° \quad 65° - 360 \cdot 2 = -655°$

Как видно, в заданном интервале, расположен всего один угол $425°$.

Пример. д) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$

Все углы поворота, конечные стороны которых, совпадают с этим углом можно найти по формуле $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ и $\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$ $(n \in N)$.

n	1	2	3
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{27\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{21\pi}{4}$

Интервалу $-4\pi \le \theta < 4\pi$ принадлежат углы

$\frac{11\pi}{4} \quad -\frac{5\pi}{4} \quad -\frac{13\pi}{4}$

10. Углы, заданные в градусах выразите в радианах, а углы, заданные в радианах выразите в градусах.

1) $225°$ 2) $-15°$ 3) $135°$ 4) $\frac{7\pi}{6}$ 5) $-\frac{5\pi}{4}$ 6) $-\frac{2\pi}{3}$

11. Выразите в градусах и в радианах угол, заданный поворотом конечной стороны, на заданную часть в окружности:

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{1}{24}$ 3) $\frac{1}{18}$ 4) $\frac{2}{3}$ 5) $\frac{7}{12}$ 6) $\frac{4}{5}$

12. Для заданного угла, выразите в радианах углы, принадлежащие интервалу $(0; 2\pi)$ и конечные стороны которых, совпадают с углом:

1) $-\frac{\pi}{3}$ 2) $-\frac{3\pi}{4}$ 3) $-\frac{19\pi}{4}$ 4) $\frac{16\pi}{3}$

5) $-\frac{7\pi}{5}$ 6) $\frac{45\pi}{8}$ 7) 8 8) 12

13. а) Найдите 4 угла, конечные стороны которых, совпадают с углом:

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{7\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{6}$ 4) $-\frac{4\pi}{3}$

б) Для каких пар углов, конечные стороны совпадают?

1) $\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}$ 3) $410°, -410°$ 4) $227°, -493°$

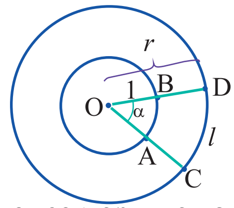
в) Запишите общий вид углов, конечные стороны которых, совпадают с углом:

1) $-60°$ 2) $\frac{\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $100°$

Длина дуги. Площадь сектора

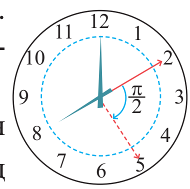
Длина дуги. Площадь сектора

Длина дуги. Запишем формулу нахождения длины дуги, соответствующей центральному углу m° окружности радиуса r: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$. Используя радианную меру длину окружности можно найти ещё проще.



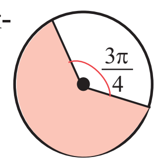
По определению радиана, если $\frac{l}{r} = \alpha$, тогда длина дуги равна произведению радиуса и радианной меры угла: $l = \alpha \cdot r$. Длина дуги окружности находится с радиусом в прямо пропорциональной зависимости.

Площадь сектора. Центральному углу m° соответствует сектор, площадь которого равна $S = \frac{\pi m}{360} \cdot r^2$. Учитывая, что радианная мера центрального угла равна $\frac{\pi m}{180}$ и обозначив её через α, запишем формулу нахождения площади сектора $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$.



Пример 1. Длина секундной стрелки часов равна 12 см. Определите длину дуги, которую описывает конец секундной стрелки за 15 секунд.

Решение. Секундная стрелка за 60 минут совершают один полный оборот. Это соответствует 2π радианам. 15 секунд соответствуют $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ части полного оборота: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ радиан. То есть, минутная стрелка за 15 секунд чертит дугу, соответствующую центральному углу $\frac{\pi}{2}$. Длина этой дуги: $l = \alpha r = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi \approx 6 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$ (см)



Пример 2. Найдите площадь и периметр закрашенного сектора на рисунке, если радиус круга равен 8 см.

Закрашенной части круга соответствует центральный угол: $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Площадь сектора равна:

$S = \frac{1}{2} \cdot \alpha r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4} \cdot 8^2 = 40\pi$ (см^2). Периметр сектора равен сумме длин двух радиусов и длины дуги: $P = 2 \cdot 8 + \frac{5\pi}{4} \cdot 8 = 16 + 10\pi \approx 47{,}4$ (см)

Обучающие задания

1. По заданным значениям найдите следующие величины. Здесь r - радиус окружности, α - центральный угол, l - длина дуги.

а) $r = 8{,}5$ см, $\alpha = 75^\circ$, $l = \square$ см б) $r = 5$ м, $l = 13$ м, $\alpha = \square$ радиан

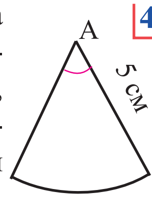
в) $r = \square$ мм, $\alpha = 1{,}8$ радиан, $l = 4{,}5$ мм

2. Найдите длину дуги и площадь сектора, соответствующих заданному радиусу и центральному углу:

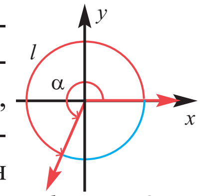
а) $r = 30$ см; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ б) $r = 12$ м; $\alpha = 90^\circ$ в) $r = 1{,}8$ дм; $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

Длина дуги. Площадь сектора

3. Периметр сектора круга на рисунке равен 16 см. Найдите радианную меру угла, соответствующую центральному углу с вершиной A и радиусом 5 см.

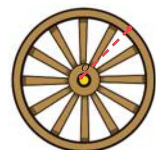


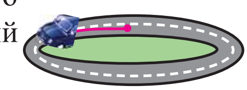
4. Найдите радианную меру центрального угла, если радиус окружности равен 20 см, а длина дуги l равна 85 см.



Линейная скорость и угловая скорость

Скорость при движении по окружности, например, скорость движения произвольной точки P колеса, которое вращается вокруг точки O, может быть вычислена двумя способами. В первом случае, её можно найти используя расстояние и время. Эта скорость называется линейной скоростью. Во втором случае - используя угол поворота (центральный угол). Эта скорость называется угловой скоростью.





$$\text{линейная скорость} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{время}}$$

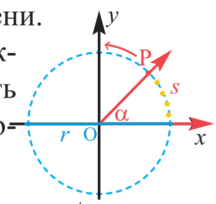
$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

Если тело движется по окружности, то линейная скорость равна отношению пройденного пути (длины дуги окружности) к промежутку времени.

$$\text{угловая скорость} = \frac{\text{угол поворота}}{\text{время}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Если тело движется по окружности, то угловая скорость равна отношению угла поворота к промежутку времени.



Здесь α (в радианах) - угол вращения за промежуток времени t.

Между линейной и угловой скоростью существует следующая связь:

линейная скорость $= r \cdot$ угловая скорость $\qquad v_x = r \cdot \omega$

Пример 3. Карусель совершает за минуту 8 полных оборотов.

а) Чему равна угловая скорость карусели за минуту(в радианах)?

б) На сколько метров за минуту передвигается лошадь, которая находится на расстоянии 3 м от центра окружности?

в) На сколько метров за минуту передвигается лошадь, которая находится на расстоянии 2 м от центра окружности?

Решение: а) Один целый оборот при вращении соответствует центральному углу 2π. За 8 оборотов этот угол равен $8 \cdot 2\pi = 16\pi$.

Угловая скорость за минуту равна $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{16\pi}{1} = 16\pi$ радиан/мин.

б) Если лошадь находится на расстоянии 3 м от центра, то она движется по окружности радиуса 3 м.

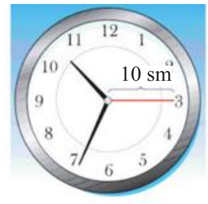
Линейная скорость: $v_x = r \cdot \omega = 3 \cdot 16\pi = 48\pi \approx 151$ м/мин

в) Если лошадь находится на расстоянии 2 м от центра, то она движется по окружности радиуса 2 м.

Линейная скорость: $v_x = r \cdot \omega = 2 \cdot 16\pi = 32\pi \approx 100$ м/мин

Длина дуги. Площадь сектора

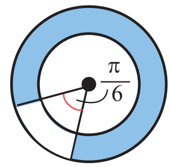
5. Длина секундной стрелки часов равна 10 см. а) Найдите угловую скорость секундной стрелки (рад/сек). б) Какой путь совершит конец стрелки за 2 минуты 15 секунд? в) Найдите линейную скорость конца секундной стрелки (см /сек).



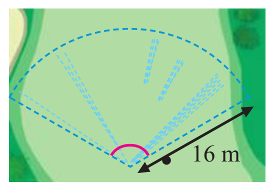
6. Радиус колеса автомобиля 40 см. Сколько радиан составит угол, если при вращении пройденный колесом путь равен:

а) 100 м б) 15 м в) 1 км г) 300 м?

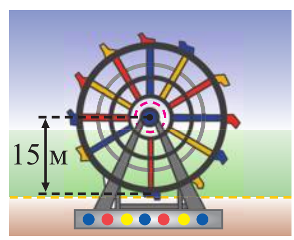
7. Найдите площадь закрашенной части, если радиус меньшей окружности на рисунке равен 4 см, а радиус большей окружности равен 6 см.



8. Система для полива, длина струи которой равна 16 м, за 15 секунд совершает один оборот.
а) Найдите площадь сектора, который может полить система, при повороте на угол $\frac{3\pi}{2}$.
б) Выразите угол на который поворачивается система за 2 минуты в градусах и в радианах.

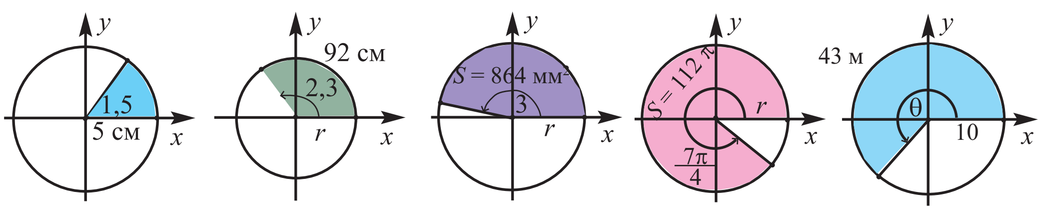


9. Карусель за минуту совершает 1,5 оборота.
а) Найдите угловую скорость карусели.
б) Найдите линейную скорость (м/минут) для точки, которая находится на расстоянии 15 м от оси.



10. Колесо велосипеда диаметром 65 см за 0,05 секунды поворачивается на 45°. Какой путь проделает велосипед за 30 секунд?

11. Для каждого рисунка найти радиус, центральный угол, длину дуги или площадь сектора.

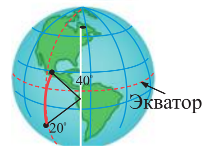


12. Тело, двигаясь по окружности, радиусом 2 м за каждые 20 секунд проходит путь 5 м. Найдите линейную и угловую скорость.

Длина дуги. Площадь сектора

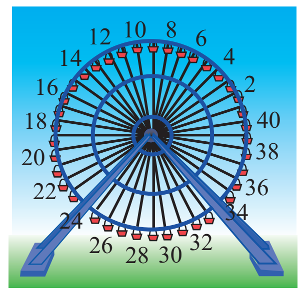
13. а) Баку расположено на 40° северной широты. Найдите расстояние от экватора до Баку по меридиану. Радиус Земли приблизительно равен 6400 км.

б) Найдите расстояние между пунктами, один из которых расположен на меридиане на 40° северной широты, а другой - на 20° южной широты.



14. Длина колеблющегося маятника равна 21 см, а длина наибольшей дуги, которую описывает маятник равна 10,5 см. Чему равна градусная мера дуги, которую описывает маятник при колебании?

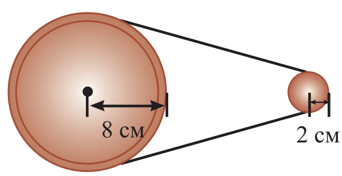
15. Кабинки карусели пронумерованы от 1 до 40. Представьте, что вы находитесь в кабинке с номером 3. Если карусель повернётся на угол $\frac{37\pi}{10}$, то кабинка с каким номером окажется на месте кабинки, в которой вы находитесь сейчас? Рассмотрите случаи поворота карусели в обоих направления.



16. Сколько полных оборотов в минуту совершают колёса велосипеда диаметром 65 см, движущегося со скоростью 30 км в час?

17. Расстояние от земли до Солнца приблизительно равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км. Допуская, что Земля движется по окружности, и совершает полный оборот вокруг Солнца за 365 дней, найдите линейную скорость (км/час).

18. Два диска радиусами 2 см и 8 см соединены ремнём, как показано на рисунке. Маленький диск за минуту совершает 3 оборота. Найдите, сколько оборотов совершает за 1 минуту большой диск.



Указание: точки, расположенные на каждом из двух дисков, движутся с одинаковой линейной скоростью.

19. Найдите длину пути, пройденного телом за промежуток времени t по окружности радиуса r с угловой скоростью ω.

а) $r = 6$ дм, $\omega = \frac{\pi \text{ рад}}{15 \text{ сек}}$, $t = 10$ мин;

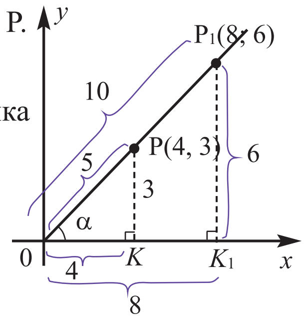
б) $r = 12$ м, $\omega = \frac{3\pi \text{ рад}}{2 \text{ сек}}$, $t = 100$ сек;

с) $r = 30$ см, $\omega = \frac{\pi \text{ рад}}{10 \text{ сек}}$, $t = 25$ сек.

20. Распылитель воды может распылять воду по кругу на расстоянии 400 м от места крепления. Если, фермер планировал полить 120 000 м^2, то на какой угол в градусах должен поворачиваться распылитель?

Практическая работа

1) Изобразите угол поворота, конечная сторона которого проходит через точку P(4; 3) при повороте на угол α.
Найдите расстояние от начала координат до точки P.



$$OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

2) Для острого угла α прямоугольного треугольника OPK α запишите следующие отношения.

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$

3) Запишите уравнение прямой, содержащей луч OP.

$$k = \frac{3}{4}, \qquad y = \frac{3}{4}x$$

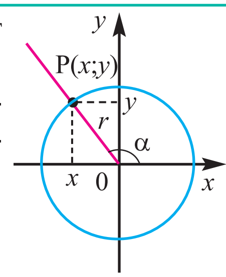
4) Убедитесь, что точка $P_1(8; 6)$ также расположена на луче OP и запишите тригонометрические отношения для угла α треугольника OP_1K_1.

$$r_1 = OP_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10, \quad \sin\alpha = \frac{6}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{8}{10}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8}$$

5) Объясните на основании записей на 2-ом и 4-ом шаге задания, зависит ли значение тригонометрических отношений для угла поворота α от расположения точки на луче?

Тригонометрические отношения для угла зависят только от значения угла.

Пусть конечная сторона угла α при повороте пересекается с окружностью радиусом r, центр которой находится в начале координат, в точке $P(x; y)$.



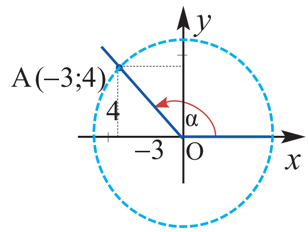
- Отношение ординаты точки P к длине радиуса называется синусом угла α : $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$
- Отношение абсциссы точки P к длине радиуса называется косинусом угла α : $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$
- Отношение ординаты точки P к абсциссе называется тангенсом угла α:
  $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ (здесь $x \neq 0$, то есть точка P не расположена на оси ординат)
- Отношение абсциссы точки P к ординате называется котангенсом угла α:
  $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$ (здесь $y \neq 0$, то есть точка P не расположена на оси абсцисс)
- kосеконсом угла α называется обратное значение для синуса:
  $$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y} \quad (\text{здесь } y \neq 0)$$
- секансом угла α называется обратное значение для косинуса:
  $$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x} \quad (\text{здесь } x \neq 0)$$

Тригонометрические функции

Пример 1. Точка A (– 3; 4) расположена на конечной стороне угла поворота α.
а) Изобразите решение примера.
б) Определите значения тригонометрических отношений для угла поворота α.

Решение:

а)



б) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

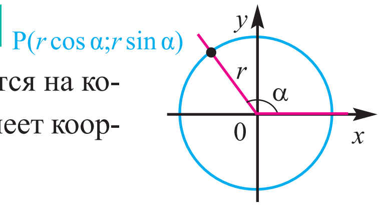
$\sin\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{3}$ $\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{3}{4}$

$\sec\alpha = \dfrac{r}{x} = -\dfrac{5}{3}$ $\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{5}{4}$

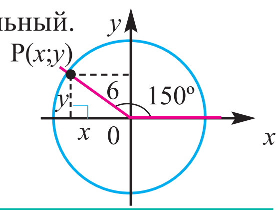
Координаты точки на окружности

Если заданная точка P окружности находится на конечной стороне угла поворота α , то она имеет координаты **P($r\cos\alpha; r\sin\alpha$)**.



Пример 2. По данным рисунка найдите координаты точки P.

Точка P находится во II четверти и косинус отрицательный.

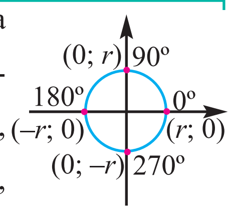


$\cos 150° = \dfrac{x}{r}$ $\qquad \sin 150° = \dfrac{y}{r}$

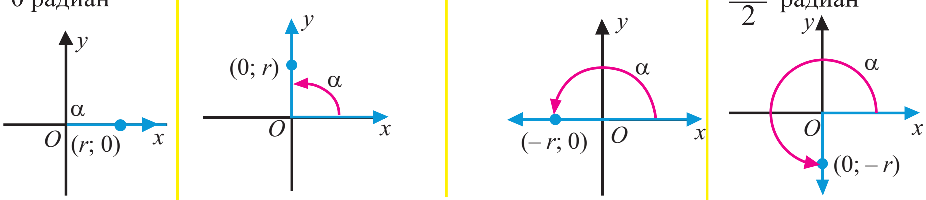
$-\cos 30° = \dfrac{x}{6}$ $\qquad \sin 30° = \dfrac{y}{6}$

$x = -6\cos 30° = -3\sqrt{3}$ $\qquad y = 6\sin 30° = 3$

Для некоторых углов, конечная сторона расположена на одной из координатной оси. В этом случае, градусная мера угла поворота равна: $\varphi = 0°$ или $\varphi = 0$ радиан, $\varphi = 90°$ или $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ радиан, $\varphi = 180°$ или $\varphi = \pi$ радиан, $\varphi = 270°$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ радиан. В этом случае координаты x или y равны или нулю, или абсолютному значению длины радиуса.

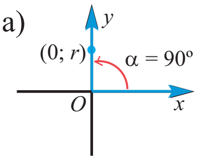


$\alpha = 0°$ или 0 радиан | $\alpha = 90°$ или $\dfrac{\pi}{2}$ радиан | $\alpha = 180°$ или π радиан | $\alpha = 270°$ или $\dfrac{3\pi}{2}$ радиан



Пример 3. Найдём значения тригонометрических отношений для:
а) $\alpha = 90°$; б) $\alpha = 180°$; в) $\alpha = 270°$.

a)



$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$

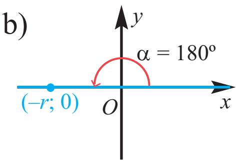
$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\operatorname{tg} 90° = \frac{y}{x} = \frac{r}{0}$

не определено

$\operatorname{ctg} 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$

b)



$\sin 180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$

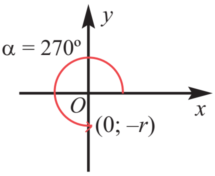
$\cos 180° = \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

$\operatorname{tg} 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$

$\operatorname{ctg} 180° = \frac{x}{y} = \frac{-r}{0}$

не определено

c)



$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

$\cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\operatorname{tg} 270° = \frac{y}{x} = \frac{-r}{0}$

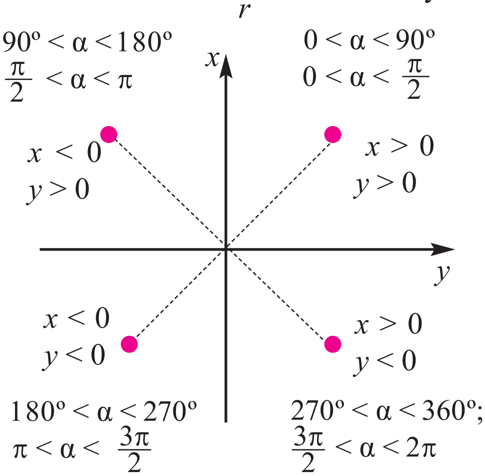
не определено

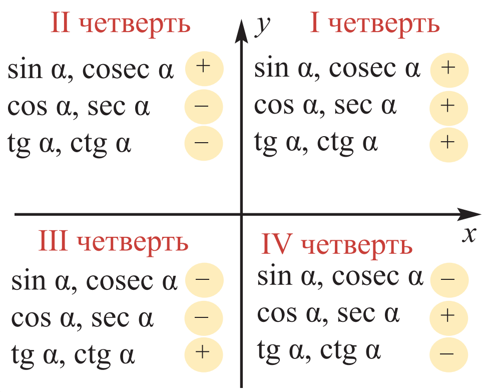
$\operatorname{ctg} 270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-r} = 0$

При всех допустимых значениях, каждому значению α, соответствует единственное значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$. Поэтому тригонометрические отношения являются функциями угла α и называются тригонометрическими функциями.

Так как $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, то знак косинуса совпадает со знаком x.

Так как $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ то знак синуса совпадает со знаком y.





Тригонометрические функции

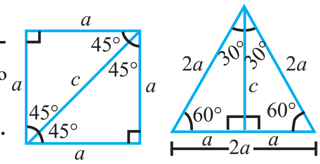
Обучающие задания

1. 1) Определите синус, косинус и тангенс для угла поворота, конечная сторона которого проходит через точку:

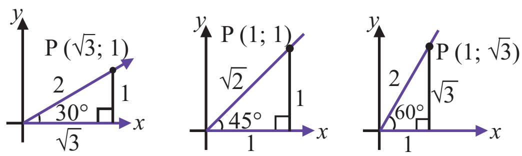
а) A(1; 2) б) B(2; 4) в) C(4; 8)

2) Сравните полученные значения.

2. а) По данным рисунка установите, что для треугольников с углами $45^o, 45^o, 90^o$ и $30^o, 60^o, 90^o$ стороны относятся в отношении $1:1:\sqrt{2}$ и $1:\sqrt{3}:2$.



б) Определите тригонометрические функции для углов 30º, 45º, 60º треугольников на рисунке.



3. Установите знак тригонометрического отношения для каждого угла.

а) sin 20° в) cos 100° д) tg 250° ж) sin 200°

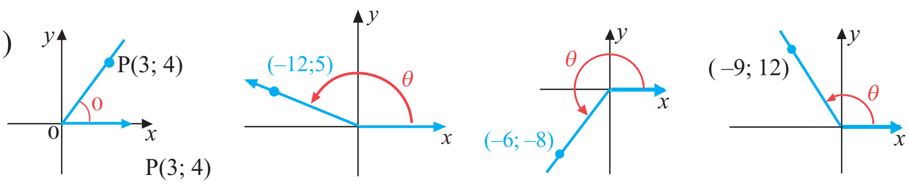
б) cos 50° г)tg 140° е) sin 310° з) cos 280°

4. Определите знак выражения.

а) $\sin\frac{5\pi}{4}$ б) $\cos\frac{3\pi}{4}$ в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$ г) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$

5. Найдите значения тригонометрических отношений угла, конечная сторона которого проходит через точку:

1)



2) а) (–12; –9) б) (–1; 1) в) (8; 6) г) (–1; 0)

д) (4; –3) е) (1; –1) ж) (–3; –4) з) (–15; 20)

6. Найдите какой четверти принадлежит угол α.

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$ б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$

в) $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$ г) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ и $\sin\alpha > 0$

7. На листе в клетку, примите единичный отрезок за 1 клетку и изобразите окружность с центром вначале координат радиусом 5 единиц.

а) Изобразите два различных угла поворота, синус которых равен $\frac{3}{5}$.

б) Изобразите углы поворота, косинус которых равен $\frac{4}{5}$.

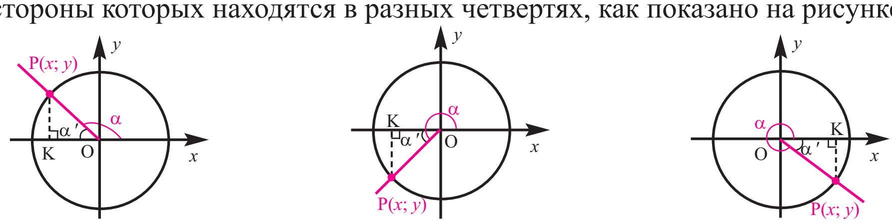
в) Изобразите углы поворота, синус которых равен $-\frac{3}{5}$.

г) Изобразите углы поворота, косинус которых равен $-\frac{4}{5}$.

Тригонометрические функции произвольного угла

Нахождение значений тригонометрических функций произвольного угла при помощи острого угла.

Исследование: 1) Начертите окружность радиуса r и углы поворота, конечные стороны которых находятся в разных четвертях, как показано на рисунке.



2) Для каждого отдельного случая, выразите основные тригонометрические функции угла поворота α через координаты точки $P(x; y)$.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

3) Длины катетов ΔOPK выразите через координаты точки $P(x; y)$:

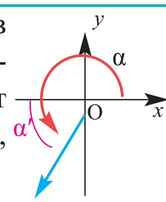
$$PK = |y| \qquad OK = |x|$$

4) Из ΔOPK запишите тригонометрические отношения для острого угла α'.

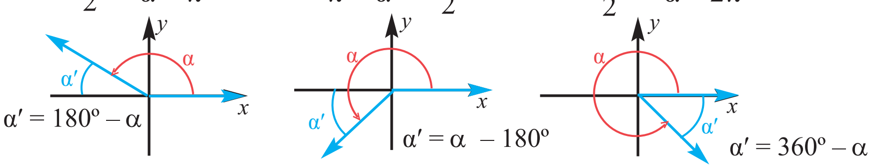
$$\sin\alpha' = \frac{|y|}{r} \qquad \cos\alpha' = \frac{|x|}{r} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{|y|}{|x|} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha' = \frac{|x|}{|y|}$$

5) Сравните значения, полученные на 2-ом и 4-ом шаге.

Чтобы вычислить тригонометрические отношения для углов больше 90°, удобно использовать тригонометрические отношения острого угла. Для любого угла поворота α существует острый угол α′, образованный конечной стороной и прямой, содержащий ось абсцисс.



$90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



Используя соответствующие острые углы можно определить тригонометрические отношения для любого произвольного угла. Эти значения можно вычислить точно для углов 30°, 45°, 60°, а для остальных острых углов - при помощи калькулятора.

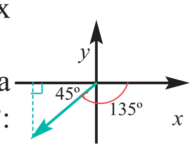
Пример 1. Для следующих углов, определите острые углы:

а) $\alpha = 300^\circ$ $\qquad$ б) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

Решение: а) конечная сторона угла 300°расположена в IV четверти. Соответствующий острый угол равен: $360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

б) конечная сторона угла $\frac{7\pi}{6}$ расположена в III четверти. Соответствующий острый угол равен: $\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$

Пример 2. Найдём значение основных тригонометрических функций для угла $\alpha = -135°$. Шаги решения:



1. Найдём наименьший положительный угол, конечная сторона которого совпадает с заданным углом и дополняет его до 360°: $-135° + 360° = 225°$
2. Для угла 225° найдём соответствующий острый угол $225° - 180° = 45°$.
3. Определим какой четверти принадлежит угол $-135°$ - угол III четверти.
4. Найдём значение тригонометрических функций для угла 45° и учтём знак этих функций в III четверти. Получим:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = 1, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = 1.$$

Тригонометрические функции для произвольного угла можно определить следующим образом:

- определяем соответствующий острый угол;
- находим значение тригонометрических функций для этого угла;
- определяем знак значения тригонометрических функций в зависимости от четверти.

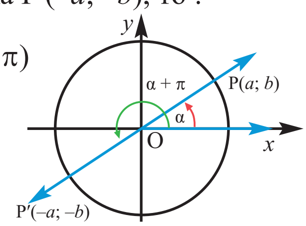
Так как конечные стороны углов α $(0° \le \alpha < 360°)$ и $\alpha + 360° \cdot k$ $(k \in Z)$ совпадают, то значения тригонометрических функций этих углов одинаковы. Если угол изменяется на целое число оборотов, то значение тригонометрических функций не меняется.

$$\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$

Заметим, что если угол меняется на пол оборота, то значения тангенса и котангенса не изменяются.

На самом деле, если углу поворота α соответствует точка $P(a; b)$, а углу поворота $\alpha + 180°$ (или $\alpha + \pi$) соответствует точка $P'(-a; -b)$, то :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi)$$

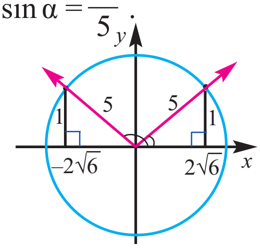


В общем случае $(k \in Z)$ выполняются равенства:

$$\mathrm{tg}(\alpha + 180° \cdot k) = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha + 180° \cdot k) = \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Пример 3. Найдём допустимые значения $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

Так как в I и во II четвертях синус положителен.



$\sin\alpha = \frac{1}{5}$, значит если $r = 5$, то $y = 1$.

Абсцисса этой точки $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$

Тогда $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

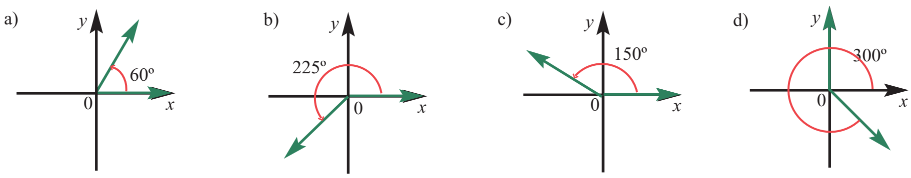
Тригонометрические функции произвольного угла

Обучающие задания

1. Для следующих углов изобразите соответствующий острый угол.

1) 240^o 2) -515^o 3) -170^o 4) 315^o 5) $\frac{25\pi}{4}$ 6) $-\frac{11\pi}{3}$ 7) $-\frac{3\pi}{4}$

2. Для следующих углов найдите значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$.



3. Не используя калькулятор, вычислите значения тригонометрических отношений.

1) $\sin 405^o$ 2) $\cos 420^o$ 3) $\text{tg}\,405^o$ 4) $\sin 390^o$ 5) $\text{cosec}\,450^o$

6) $\text{ctg}\,390^o$ 7) $\sec 420^o$ 8) $\cos\frac{33\pi}{4}$ 9) $\sin\frac{9\pi}{2}$ 10) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$

4. Какой острый угол соответствует углу -60^o? Найдите $\cos(-60^o)$, $\sin(-60^o)$, $\text{tg}(-60^o)$, $\text{ctg}(-60^o)$. Сравните значений тригонометрических функций для углов -60^o и 60^o.

5. Не используя калькулятор, вычислите значения выражений.

а) $\cos(-60°)$ в) $\sin(-315°)$ д) $\sin 495°$ ж) $\cos 600°$

б) $\sin(-120°)$ г) $\text{tg}(-210°)$ е) $\cos(-225°)$ з) $\text{tg}\,420°$

6. Зная, что $\sin 25° \approx 0{,}42$ и $\cos 25° \approx 0{,}91$, вычислите (не используя калькулятор).

а) $\sin 155°$ в) $\cos 335°$ д) $\sin 205° - \cos 155°$

б) $\cos 205°$ г) $\sin 335°$ е) $\cos 385° - \sin 515°$

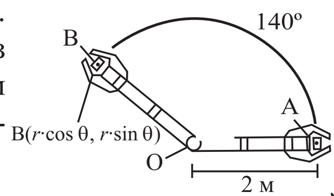
7. а) Зная, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ угол α принадлежит II четверти, найдите возможные значения $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$.

б) Зная, что $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и угол α принадлежит IV четверти, найдите возможные значения $\sin\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$.

8. Не используя калькулятор, вычислите

а) $\sin 400^o - \sin 40^o$ б) $\frac{\cos 410^o}{\cos 50^o}$ в) $\frac{\text{tg}\,200^o}{\text{tg}\,20^o}$

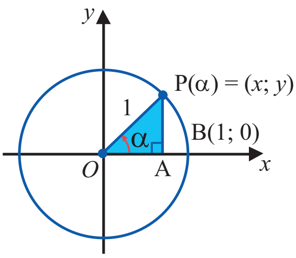
9. Длина "руки" робота 2 м. Робот перенёс предмет из точки A в точку B. При этом "рука" робота совершила поворот на угол 140°.



Если движение робота принять за угол поворота, то найдите координаты точки B.

Единичная окружность и тригонометрические функции

Значения тригонометрических функций зависят только от значения угла α и не зависят от радиуса окружности. Поэтому, не нарушая общности, можно принять $R = 1$. Окружность, центр которой находится в начале координат, с радиусом равным единице, называется **единичной окружностью**.



Координаты точки, принадлежащей окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

Если точка $P(\alpha) = (x; y)$ является точкой пересечения единичной окружности и конечной стороны угла поворота α, то между ней и тригонометрическими функциями существует следующая связь:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

Таким образом, координаты точки принадлежащей единичной окружности, можно записать как: $P(\alpha) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$.

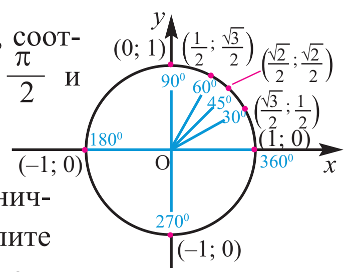
Также по заданным координатам можно найти следующие тригонометрические функции: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

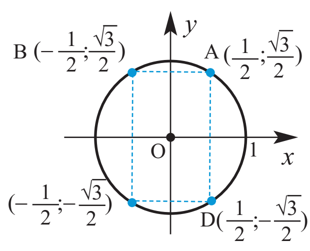
Зная, что $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$ при определённом повороте на единичной окружности, можно найти соответствующие координаты точки. Для этого надо выполнить следующие шаги:

1) На единичной окружности отметим точки, соответствующие углу поворота $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и найдём координаты этих точек по формуле

$$y = \sin\alpha,\ x = \cos\alpha\ .$$

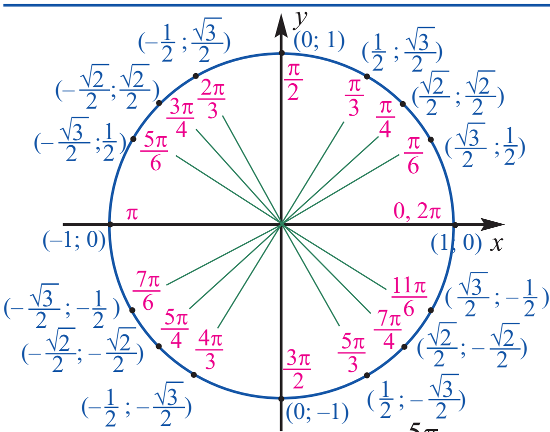


2) Для некоторой точки, принадлежащей единичной окружности, например $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$,определите координаты симметричной точки. Как видно по рисунку, существует 3 точки, симметричные точке A, которые расположены во II, III и IV четвертях.



Точка B симметрична точке A относительно оси *y,* точка C - относительно начала координат, а точка D - относительно оси *x*. Абсолютные значения координат этих точек равны и отличаются только знаком.

3) Таким образом, можно определить координаты новых точек, зная координаты точки, принадлежащей I четверти. Т.е. получаем единичную окружность, на которой отмечены углы поворота и координаты точек.



Так как координаты точек на единичной окружности удовлетворяют условиям

$-1 \le x \le 1$ и $-1 \le y \le 1$, то

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ и $-1 \le \sin\alpha \le 1$

Наибольшее значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равно 1, а наименьшее значение равно –1.

Пример 1. Для угла поворота $\frac{5\pi}{4}$ вычислите значения основных тригонометрических функций.

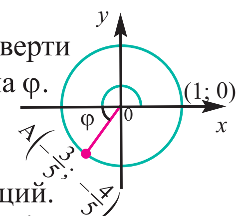
Решение: Конечная сторона угла поворота $\frac{5\pi}{4}$ расположена в III четверти. Этому углу соответствует острый угол $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$. Точка пересечения конечной стороны угла $\frac{5\pi}{4}$ с единичной окружностью симметрична точке $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ относительно начала координат и соответствует точке $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Тогда, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = 1$

Пример 2. Точка А, с абсциссой $-\frac{3}{5}$ расположена в III четверти и пересекается с единичной окружностью на стороне угла φ.

а) Найдём ординату точки А.

б) Изобразим рисунок, соответствующий условию и для угла φ найдём значения шести тригонометрических функций.



Решение: а) $(-\frac{3}{5})^2 + y^2 = 1$, $y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, $y = \pm\frac{4}{5}$.

Так как точка расположена в III четверти $y = -\frac{4}{5}$

б) $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$, $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$,

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{3}{4}$, $\sec\varphi = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec}\varphi = -\frac{5}{4}$

Пример 3. Найдём наибольшее и наименьшее значение выражения $3 + 2\sin\alpha$.

Решение: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ *умножим каждую из частей на 2*

$-2 \le 2\sin\alpha \le 2$ *прибавим к каждой части 3*

$-2 + 3 \le 3 + 2\sin\alpha \le 2 + 3$ $\quad$ $1 \le 3 + 2\sin\alpha \le 5$

Таким образом, для выражения $3 + 2\sin\alpha$ НМЗ равно 1, а НБЗ равно 5.

Обучающие задания

1. а) Сколько точек на единичной окружности имеют абсциссу $\frac{1}{2}$? Найдите ординаты этих точек. Для каждой точки изобразите угол поворота.
б) Сколько точек на единичной окружности имеют ординату $\frac{1}{2}$? Найдите абсциссы этих точек. Для каждой точки изобразите угол поворота.

2. При помощи единичной окружности, найдите значение тригонометрических функций для угла $-\frac{7\pi}{6}$.

3. Найдите значение тригонометрических функций для угла $\frac{13\pi}{6}$

4. Точка $A(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ является точкой пересечения единичной окружности и стороны угла φ. Изобразите соответствующий условию рисунок и найдите значение тригонометрических функций для угла φ.

5. Если $\alpha = 30^\circ$, найдите значение выражений:
а) $3 \sin \alpha$ б) $\sin 3\alpha$ в) $2 \cos \alpha$ г) $\cos 2\alpha$

6. Найдите значение выражения $\sin \alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$, если:
а) $\alpha = 30^\circ$ б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

7. Если $\alpha = 15^\circ$, найдите значение выражений.
а) $2 \sin(3\alpha + 15^\circ) + 3 \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha)$ б) $\operatorname{tg}(4\alpha - 15^\circ) - 2 \cos(2\alpha + 30^\circ)$

8. Установите верно ли неравенство?
а) $\sin 45^\circ + \cos 60^\circ > 1$ б) $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} > 1$

9. Найдите НМЗ и НБЗ для выражений:
а) $2 + 3\sin \alpha$ б) $1 - \sin \alpha$ в) $1 + \cos \alpha$ г) $3 - 2\cos \alpha$

10. Найдите НМЗ и НБЗ для выражений:
а) $2 + |\sin \alpha|$ б) $2 - |\cos \alpha|$ в) $1 + \sin^2 \alpha$ г) $4 + \cos^2 \alpha$

11. Возможно ли равенство?
а) $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ б) $\cos \beta = \frac{4}{3}$ в) $\sin \alpha = \sqrt{5} - 1$ г) $\cos \beta = \sqrt{2} - 1$

12. На единичной окружности покажите точки, соответствующие углу поворота α.
а) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ б) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ в) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

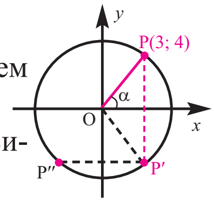
13. Сколько точек на единичной окружности удовлетворяет условию $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$? Запишите общую формулу для нахождения соответствующих углов поворота.

14. На единичной окружности координаты точки $P(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ соответствуют углу поворота $\frac{7\pi}{4}$. Покажите отрицательный угол, конечная сторона которого совпадает с данным углом, и найдите значения тригонометрических функций.

15. При помощи единичной окружности покажите углы поворота удовлетворяющие равенству $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

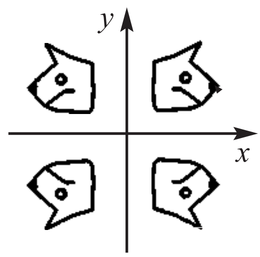
Формулы приведения

Практическая работа

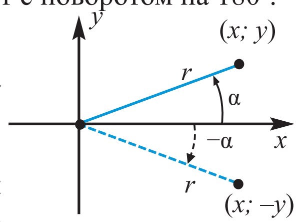


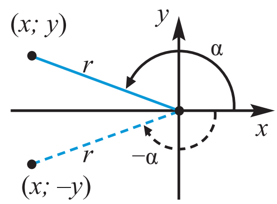
1) Отметьте на окружности радиуса 5 точку P(3; 4).
2) Покажите координаты точки P′, полученной отображением от оси *x* точки P.
3) В какую точку перейдёт точка P′ при отображении относительно оси *y* ?
4) Сравните координаты точек P и P″.
5) Симметричны ли координаты точек P″ и P относительно начала координат?
6) Если точка P соответствует углу поворота α, то каким углам поворота соответствуют точки P′ и P″ ?

Если объект находится в I четверти, то симметричный ему относительно оси *y* объект находится во II четверти. Симметричный последнему относительно оси *x,* объект находится в III четверти, и он совпадает с объектом, симметричным начальному объекту из I относительно начала координат. Обратите внимание, что отображение относительно оси *y* и отображение, относительно оси *x,* совпадают с поворотом на 180°.



При отображении относительно оси *x,* точка расположенная на конечной стороне угла изменяет координаты, как показано на рисунке. То есть, при этом знак меняет только координата *y.* Таким образом, так как косинус зависит от *x* он не меняется, зато меняется знак синуса. Отсюда, для углов α и –α можно записать следующие зависимости между тригонометрическими функциями.





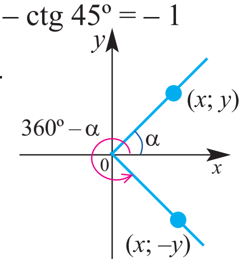
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

То есть, **синус, тангенс и котангенс нечётные функции, косинус-чётная.**

Пример 1: $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$ $\qquad \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$

Конечные стороны углов поворота α и 360° – α симметричны относительно оси *x*. То есть $(x; y) \to (x; -y)$.
Отсюда получаем:

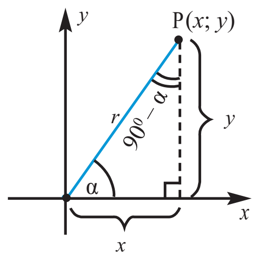


$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Формулы приведения

Запишем для углов α и 90º – α прямоугольного треугольника с острым углом α тригонометрические отношения:



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$

При попарном сравнении равенств можно увидеть следующую связь- между значениями тригонометрических функций углов α и 90º – α.

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Повернём конечную сторону угла поворота α ещё на 90°. При этом точка P(x; y), расположенная на стороне преобразуется в точку P′(–y; x).

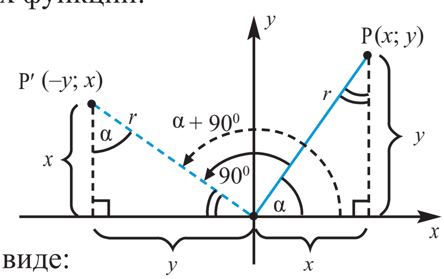
По определению тригонометрических функций:

$\sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$

$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha,$

$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$

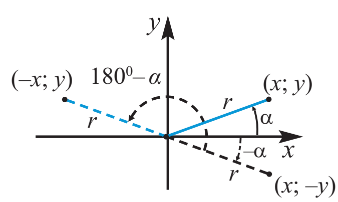


Запишем эти формулы в следующем виде:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Как видно по рисунку отображения относительно оси y и оси x эквивалентны повороту на 180°. Изменение координат, можно записать следующим образом:



$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

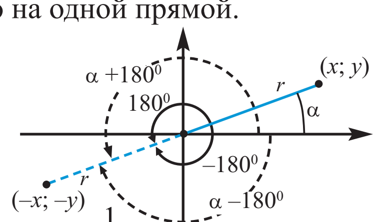
Как видно по рисунку, при повороте угла α на 180° конечная сторона расположена в противоположных четвертях, но на одной прямой.

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$



Пример 2. $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

Формулы приведения

Для получения аналогичных формул тригонометрических функций угла поворота $270° + \alpha$ достаточно записать $270° + \alpha = 90° + (180° + \alpha)$ и применить последовательность соответствующих формул. Например:

$\sin(270^o + \alpha) = \sin(90° + (180° + \alpha)) = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

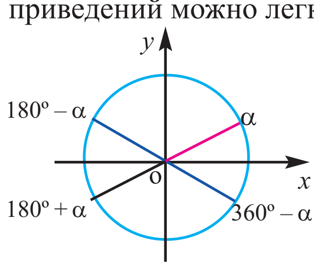
$\cos(270^o + \alpha) = \cos(90° + (180° + \alpha)) = -\sin(180° + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

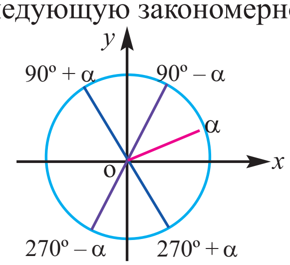
Теперь запишем соответствующие формулы для угла поворота $270° - \alpha$. Например:

$\sin(270^o - \alpha) = \sin(270° + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270^o - \alpha) = \cos(270° + (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

При помощи полученных формул можно найти значения тригонометрических функций произвольного угла, зная значения для соответствующего острого угла. Эти формулы называются формулами приведения. Для формул приведений можно легко увидеть следующую закономерность





1) Если аргумент имеет вид $90^o \pm \alpha$ или $270^o \pm \alpha$, то функция преобразуется в “сопряжённую” функцию (то есть синус в косинус или наоборот, а тангенс в котангенс или наоборот) угла α.

2) Если аргумент имеет вид $180^o \pm \alpha$ или $360^o \pm \alpha$, то функция преобразуется в одноимённую функцию угла α.

В каждом из обоих случаев, знак полученной в результате преобразования функции имеет одинаковое значение со знаком острого угла α в соответствующей четверти.

Обучающие задания

1. 1) Найдите наименьший положительный угол, конечная сторона которого получена отражением конечной стороны угла $\alpha = 32°$:

а) относительно оси x;

б) относительно оси y;

с) относительно начала координат.

2) Выполните аналогичное задание для $\alpha = 220°$.

2. Вычислите значения тригонометрических функций двумя способами:

1) Приведя к тригонометрической функции угла, конечная сторона которого совпадает с заданным углом и принадлежит интервалу $[0^o; 360^o]$;

2) Применив связь между углами $-\alpha$ и α для тригонометрических функций: а) $\alpha = -30^o$ б) $\alpha = -120^o$ в) $\alpha = -60^o$

Формулы приведения

3. Упростите.

а) $\sin(180^o + \alpha)$ б) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ в) $\cos(180^o + \alpha)$

г) $\mathrm{tg}(180^o - \alpha)$ д) $\mathrm{ctg}(90^o + \alpha)$ е) $\cos(\pi - \alpha)$

4. Выше было доказано тождество $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ для угла α в I четверти. Докажите это тождество для угла, принадлежащего II четверти.

5. Покажите справедливость тождества $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ для углов 0°, 90°, 180°, 270°.

6. Следующие выражения выразите через тригонометрическую функцию острого угла, применив формулы приведения и найдите их значения.

а) $\cos 210^o$ б) $\cos 120^o$ в) $\sin 150^o$ г) $\mathrm{tg}\, 300^o$

д) $\cos\frac{5\pi}{4}$ е) $\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{6}$ ж) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{3}$ з) $\sin\frac{2\pi}{3}$

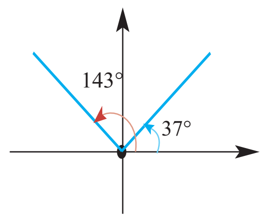
7. Найдите все углы из промежутка $[0^o; 360^o]$, синусы которых равны:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Найдите все углы из промежутка $[0^o; 360^o]$, синусы которых равны:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$ б) $\sin\alpha = 0{,}3$ в) $\sin\alpha = 0{,}8$

Пример. Найдите все углы $0 \le \alpha \le 360$,значения которых равны $\sin\alpha = 0{,}6$. Нажав на калькуляторе кнопку **asin** наберите (0.6). На экране высветится ≈37°. Так как во II четверти синус положительный, то синус угла $180° - 37° = 143°$ тоже будет $\approx 0{,}6$ так как $\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$.



9. Упростите выражение.

а) $\sin(\alpha - 180°)$ б) $\cos(\alpha - 270°)$ в) $\mathrm{tg}(\alpha - 90°)$

г) $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})$ д) $\cos(\alpha - \pi)$ е) $\mathrm{tg}(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

10. Упростите.

а) $\sin^2(\pi + \alpha)$ б) $\cos^2(180^o - \alpha)$ в) $\mathrm{ctg}^2(90^o + \alpha)$

11. Приведите к тригонометрическим функциям угла от 0^o до 90^o.

а) $\sin(-170°)$ б) $\cos(-160°)$ в) $\mathrm{tg}\, 130°$ г) $\mathrm{ctg}\, 320°$

12. Покажите, что синусы смежных углов равны, а косинусы противоположны.

13. α, β, γ - углы треугольника. Докажите, что:

а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ б) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

14. Упростите выражение.

а) $\frac{\sin 80^o}{\cos 10^o}$ б) $\frac{\cos 70^o}{\sin 20^o}$ в) $\mathrm{tg}\, 40^o \cdot \mathrm{ctg}\, 50^o$ г) $\sin 72^o - \cos 18^o$

15. Упростите .

а) $\sin(90^o - \alpha) - \cos(180^o - \alpha) + \mathrm{tg}(180^o - \alpha) + \mathrm{ctg}(270^o - \alpha)$

б) $\cos(20^o - \alpha) + \sin(250^o + \alpha)$

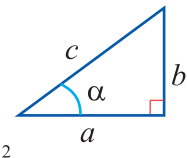
Тригонометрические тождества

Практическая работа

Для острого угла α прямоугольного треугольника покажите, что $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, выполнив следующие шаги:

1) Запишите теорему Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$

2) Каждую из сторон равенства разделите на c^2: $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2}$



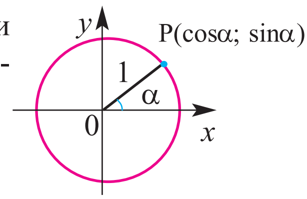
3) Примените свойство степени: $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{c}\right)^2$

4) Примите во внимание, что: $\dfrac{a}{c} = \cos\alpha \quad \dfrac{b}{c} = \sin\alpha$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Связь между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Тождество $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ можно доказать и при помощи координат точки, принадлежащей единичной окружности.



$x^2 + y^2 = 1$ *уравнение единичной окружности*

$\mathbf{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ *замена $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$*

По координатам точки на единичной окружности и по определениям тригонометрических функций имеем:

Для всех значений α, при которых $\cos\alpha \neq 0$, $\quad \mathbf{tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

Для всех значений α, при которых $\sin\alpha \neq 0$, $\quad \mathbf{ctg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

Из данных равенств имеем,что если для угла α одновременно выполняются условия $\cos\alpha \neq 0$ и $\sin\alpha \neq 0$, то справедливо тождество $\mathbf{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$

Разделив обе часте равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ поочередно на $\cos^2\alpha$ и на $\sin^2\alpha$ будем иметь: $\quad \mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}, \qquad \mathbf{1 + ctg^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}}$

Полученные выше равенства являются тождествами. Их называют основными тригонометрическими тождествами.

На основании основных тригонометрических можно написать:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

При помощи основных тригонометрических тождеств можно упрощать тригонометрические выражения и вычислять модуль значения всех остальных функций, зная значение одной из них.

Тригонометрические тождества

Пример 1. Используя основные тригонометрические тождества, докажите,что: $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{2}{\cos x}$

Доказательство

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}$$

Пример 2. Зная, что $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ и угол β принадлежит III четверти, найдите остальные тригонометрические функции.
Из формул $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ получаем: $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$
Так как угол β принадлежит III четверти, то
$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-(-\tfrac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$$
Тогда $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{3}{4}$

Обучающие задания

1. Упростите.

а) $1-\sin^2\alpha$ б) $1-\cos^2\alpha$
в) $\sin^2\beta-1$ г) $\cos^2\beta-1$
д) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ е) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$
ж) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$ з) $\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$

2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

4. По данным для угла β, найдите значения тригонометрических функций.

а) $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ б) $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$
в) $\operatorname{tg}\beta=1$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ г) $\operatorname{ctg}\beta=-\sqrt{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

5. Упростите.
а) $(1-\cos^2\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$ б) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

в) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ г) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

д) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}:\left(1+\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right)$ е) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}:\left(1+\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2\right)$

6. Зная, что tg $\alpha = 2$, найдите значение выражения.

а) $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha}$ б) $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$

7. Упросите выражение $\sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, зная что:

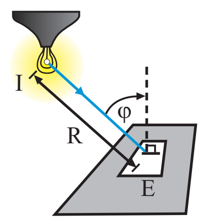
а) $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ б) $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

8. Докажите тождества.

$\dfrac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{2} = \cos x \cdot \sin x$ $\dfrac{1 + \sec x}{\sin x + \operatorname{tg} x} = \operatorname{cosec} x$

$\dfrac{1 - \cos^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \operatorname{tg}^2 x$ $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} = \sec x$

9. Освещённость света, вычисляется по формуле $E = \dfrac{I}{R^2\cos\varphi}$. Здесь İ - сила света, R- расстояние от источника. Докажите, что данная формула эквивалентна формуле $E = \dfrac{I \cdot \operatorname{tg}\varphi}{R^2\sin\varphi}$.



10. Зная, что $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ найдите значение выражения $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

11. Упростите выражение и найдите его значения.

а) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$ б) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$

при $\cos\alpha = 0{,}1$ при $\sin\alpha = \dfrac{1}{8}$

12. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$, найдите произведение $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

13. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{2}$, найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

14. Существует ли угол поворота, удовлетворяющий равенствам?

а) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ б) $\sin\beta = \dfrac{1}{3}$ и $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$

в) $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{4}{3}$ г) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{3}{4}$

15. Упростите выражение.

а) $(1 - \sin(-\alpha)) \cdot (1 - \sin\alpha)$ б) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2(-\alpha)$

в) $\dfrac{1 - \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$ г) $\sin^2(-\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)$

16. Докажите, что значение выражения на зависит от β, при всех допустимых значениях β .

а) $(\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$ б) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$

17. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражений.

а) $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$ б) $\sin\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$

Формулы сложения

Практическая работа

1) Покажем по шагам, равенство выражения

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ для $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ и $\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

а) Для значений α и β, вычислим значения выражения в левой части.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

б) Для значений α и β, вычислим значения выражения в правой части.

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}=1\cdot\frac{1}{2}-0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

2) Как можно вычислить значение тригонометрических функций для угла 15º, используя разность значений углов 45° и 30°(15º = 45° - 30°)?

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

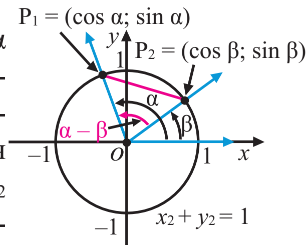
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

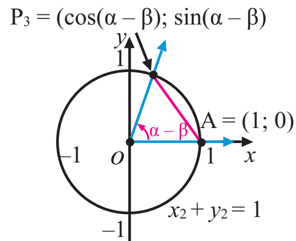
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

► Сначала докажем тождество $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

На рисунке а) для угла α координаты точки P_1, взятой на единичной окружности равны $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а для угла β координаты точки P_2 равны $(\cos\beta; \sin\beta)$. Разместим углы $\alpha-\beta$, как показано на рисунке б) .



а)



б)

Тогда, для угла $\alpha-\beta$ координаты точки P_3 будут $(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$.
Из того, что $\Delta P_1OP_2\cong\Delta P_3OA$ (по признаку СУС) следует, что $P_1P_2\cong P_3A$.

$P_1P_2=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$

$P_3A=\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2}$ ***формула нахождения расстояния между двумя точками***

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2$ ***по свойству равенств***

$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$
$=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)$ ***по формулам сокращённого умножения***

$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=$
$=(\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta))-2\cos(\alpha-\beta)+1$ ***по свойству сложения и применению тригонометрических тождеств***
$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

$2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2\cos(\alpha-\beta)$ ***по свойству сложения***
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ***справедливость тождества доказана.***■

Формулы сложения

► Доказательство тождества $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$

учитывая, что $\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\quad$ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ *справедливость тождества доказана*

► Доказательство тождества $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{\text{по формулам приведения}} = \underbrace{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)}_{\text{группируя}} =$$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta}_{\text{по формуле косинуса разности}} = \underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}_{\text{с учётом формул приведения}}$$

► Доказательство тождества $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Пример 1. Найдём значение выражения $\cos\frac{7\pi}{12}$.

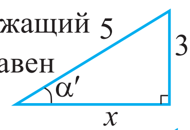
Решение. $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

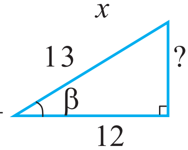
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Пример 2. Найдём значение выражения $\sin(\alpha-\beta)$, если

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Известно, что $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. Если углу α соответствует острый угол α', то $\sin\alpha' = \frac{3}{5}$. Так как противолежащий катет равен 3, а гипотенуза 5, тогда прилежащий катет равен $x = \sqrt{25-9} = 4$ и учитывая, что α угол III четверти, получим: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Аналогично, если зная, что $\cos\beta = \frac{12}{13}$, получаем, что $\sin\beta = \frac{5}{13}$.





$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$$

Можно записать формулы сложения для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \underbrace{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}_{\text{по определению}} = \underbrace{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}}_{\text{по формулам сложения}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}}_{\text{разделив числитель и знаменатель на } \cos\alpha\,\cdot\,\cos\beta} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}_{\text{упрощаем}}$$

Значит: $\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$

Аналогичным образом можно показать, что : $\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$

Формулы сложения

Обучающие задания

1. Вычислите значения выражения.

а) $\sin 75°$ б) $\cos 75°$ в) $\sin(-15°)$ г) $\cos 105°$

д) $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$ е) $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ з) $\sin\frac{\pi}{12}$ ж) $\cos\frac{7\pi}{12}$

2. Упростите. Найдите значение выражения.

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 2) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 4) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3. Установите истинность равенств, используя формулы сложения.

а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ б) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

в) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ г) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$

4. Упростите.

а) $\sin 12^\circ \cdot \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 18^\circ$ б) $\cos 17^\circ \cdot \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ$

в) $\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ$ г) $\sin 23^\circ \cdot \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cdot \cos 97^\circ$

5. Упростите.

а) $\cos(36^\circ + \alpha)\cdot\cos(24^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha)\cdot\sin(24^\circ - \alpha)$

б) $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

6. Найдите значение выражения.

а) $\dfrac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ}$ б) $\dfrac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 5^\circ}$

7. а) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, найдите $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)$

б) $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите $\cos(\frac{\pi}{3} + \beta)$.

8. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, α угол III четверти, а угол β угол IV четверти.

Найдите: а) $\sin(\alpha + \beta)$ б) $\cos(\alpha - \beta)$

9. α и β углы III четверти и $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$. Найдите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$ б) $\cos(\alpha + \beta)$

10. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите косинус третьего угла.

Формулы сложения

11. Упростите.

а) $\dfrac{\text{tg } 13^\circ + \text{tg } 47^\circ}{1 - \text{tg } 13^\circ \cdot \text{tg } 47^\circ}$ b) $\dfrac{\text{tg } 46^\circ - \text{tg } 1^\circ}{1 + \text{tg } 46^\circ \cdot \text{tg } 1^\circ}$

12. Найдите $\text{tg}(45^\circ + \alpha)$, если $\text{tg } \alpha = \dfrac{2}{3}$.

13. Если $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg } \beta = \dfrac{1}{3}$, то найдите :

а) $\text{tg}(\alpha + \beta)$ б) $\text{tg}(\alpha - \beta)$

14. Найдите значение выражения.

а) $\text{tg } 15^\circ$ б) $\text{tg } 75^\circ$ в) $\text{ctg } 105^\circ$

15. Найдите значение выражения $\cos 72^\circ \sin 48^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$, используя формулы приведения и формулы сложения.

16. Упростите.

а) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \sin\beta}$ б) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$

17. Упростите.

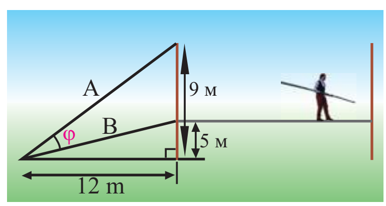
а) $\dfrac{\text{tg}(45^\circ + \alpha) - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \text{tg } \alpha}$ б) $\dfrac{\text{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) + \text{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}{1 - \text{tg}(\frac{\pi}{8} + \alpha) \cdot \text{tg}(\frac{\pi}{8} - \alpha)}$

18. а) $\text{tg}(\alpha + \beta) = -1$, $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\text{tg } 2\beta$.

б) $\text{ctg}(\alpha + \beta) = 2$, $\text{ctg}(\alpha - \beta) = 1$. Найдите $\text{tg } 2\alpha$.

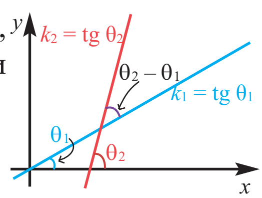
Прикладные задания

19. Оборудование для ходьбы по канату закреплено между двумя столбами, высотой 9 м. Канатоходец движется по канату B, на расстоянии 5м от земли. Канаты A и B закреплены на расстоянии 12 м от столба. Найдите синус и градусную меру угла φ между канатами A и B, с точностью до десятых.



20. Зная, что k_1 и k_2 угловые коэффициенты прямых, острый угол $\theta_2 - \theta_1$, образованный двумя прямыми при пересечении, можно найти по формуле:

$$\text{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$



Найдите острый угол, образованный при пересечении двух прямых:
а) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ и $y = 2x - 1$; б) $y = x + 2$ и $y = 3x - 1$.

Следствия из формул сложения

Практическая работа

Преобразуйте сумму $\sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ в произведение, выполнив следующие шаги:

1) $\begin{cases} x + y = 70^\circ \\ x - y = 10^\circ \end{cases}$ решив систему уравнений найдите такие углы, чтобы их сумма была равна 70°, а разность 10°: $x = 40^\circ$ $y = 30^\circ$

2) Запишите следующее $70^\circ = 40^\circ + 30^\circ$, $10^\circ = 40^\circ - 30^\circ$ и упростите

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ = \sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ) = \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ +$

$+ \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin 40^\circ$

Преобразование суммы(разности) в произведение

Если $\begin{matrix} \alpha = x + y \\ \beta = x - y \end{matrix}$, тогда $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y$. Итак

$$\boldsymbol{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$ Аналогично получаем:

$$\boldsymbol{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

1. Преобразуйте в произведение: а) $\sin 52^\circ + \sin 32^\circ$ б) $\sin 72^\circ - \sin 32^\circ$ в) $\cos 32^\circ + \cos 2^\circ$ г) $\cos 42^\circ - \cos 22^\circ$

2. Вычислите значение выражения.

а) $\cos 130^\circ + \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$ б) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ - \cos 10^\circ$

3. Преобразуйте сумму (разность) в произведение.

$\sin 6x + \sin 2x$ | $\cos 4x - \cos 2x$ | $\sin \dfrac{\pi}{12} - \sin \dfrac{5\pi}{12}$ | $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

4. Упростите.

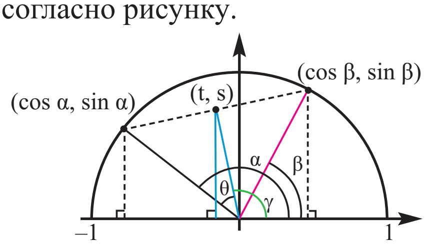
а) $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$ б) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}$ в) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

5. Покажите справедливость равенств, согласно рисунку.

$\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = s = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = t = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



6. Представьте в виде произведения.

а) $\dfrac{1}{2} + \sin \alpha$ б) $\dfrac{1}{2} + \cos \alpha$ в) $2 \cos \alpha - \sqrt{3}$

Следствия из формул сложения

Формулы преобразования произведения

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

Справедливость данных тождеств можно показать при помощи формул сложения:

почленно складываем

$$+\begin{array}{l}\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y\\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y\end{array}$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

почленно складываем

$$+\begin{array}{l}\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y\end{array}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Следующее тождество можно доказать аналогичным образом.

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

7. Для вычисления примените тождества преобразования в произведения.

а) $\sin 15° \cdot \cos 15°$ б) $\sin 105° \cdot \sin 15°$ в) $\cos 75° \cdot \cos 75°$

8. Представьте выражения в виде разности или суммы.

$\sin 6x \cdot \sin 2x$ $\sin x \cdot \cos 2x$ $\cos 9x \cdot \cos 2x$ $\cos\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}$

$\cos 7x \cdot \cos 3x$ $\sin 8x \cdot \sin 4x$ $\sin 2x \cdot \cos 3x$ $\cos\frac{5x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}$

9. Докажите, что $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

10. Вычислите.

а) $2\cos 40^o \cdot \cos 20^o - \cos 20^o$ б) $2\sin 40^o \cdot \sin 10^o + \cos 50^o$

11. Найдите значение выражения.

а) $\sin 15^o \cdot \cos 7^o - \cos 79^o \cdot \cos 11^o - \sin 86^o \cdot \sin 4^o$

б) $\cos 73^o \cdot \cos 17^o - \sin 13^o \cdot \cos 21^o - \cos 86^o \cdot \cos 4^o$

12. Разложите на множители.

а) $\sin 2x \cdot \cos 4x - \sin 6x \cdot \cos 8x$ б) $\cos 5x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \cos 2x$

Следствия из формул сложения

Тригонометрические функции двойного аргумента

Формулы сложения позволяют выразить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$ через тригонометрические функции угла α.

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

Таким образом, получаем тождества, которые называются формулами двойного аргумента:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\qquad \mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Формулы половинного аргумента

Имеем, что $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Отсюда:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\qquad \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Заменяем в данной формуле α на $\dfrac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Для половинных аргументов справедливы тождества.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\qquad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Знак в правой части в данном равенстве зависит от того, в какой четверти находится угол $\dfrac{\alpha}{2}$.

Пример 1. Упростим выражение $\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha$.

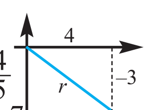
Решение. $\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
$= \dfrac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$

Пример 2. Не используя калькулятор, вычислим значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, зная, что угол α принадлежит IV четверти и $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

Решение. $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$



Пример 3. Найдём значений $\cos\frac{\pi}{8}$.

Решение:

Используем формулу половинного аргумента $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\frac{\pi}{8}$ угол I четверти и в этой четверти косинус положителен.

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+(\sqrt{2}/2)}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

Обучающие задания

13. Упростите.

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha}$ б) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha$

в) $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot \sin 2\alpha$ г) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

14. Если $\cos\alpha = -0{,}8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, найдите:

а) $\sin 2\alpha$ б) $\cos 2\alpha$ в) $\mathrm{tg}\,2\alpha$

15. Если $\sin\beta = -\frac{12}{13}$ и угол β расположен в III четверти, найдите:

а) $\sin 2\beta$ б) $\cos 2\beta$ в) $\mathrm{tg}\,2\beta$

16. Упростите.

а) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ б) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$

17. Найдите значение выражения.

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ б) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

в) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$ г) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

д) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,22^\circ 30'}{1-\mathrm{tg}^2\,22^\circ 30'}$ е) $\frac{4\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ}$

18. Найдите:

а) $\sin 22^\circ 30'$ б) $\cos 22^\circ 30'$ и) $\mathrm{tg}\,22^\circ 30'$ d) $\mathrm{tg}\,15^\circ$ e) $\cos 67{,}5^\circ$

19. Если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, то найдите :

а) $\sin\frac{\alpha}{2}$ б) $\cos\frac{\alpha}{2}$ в) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

20. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$, зная что:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

21. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Следствия из формул сложения

22. Докажите справедливость тождеств, при помощи формул суммы и разности тригонометрических функций.

а) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ б) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

23. Угол α расположен во II четверти $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$

а) Найдите значение sin 2α. б) Найдите значение cos 2α.

в) При помощи калькулятора найдите радианную меру угла α.

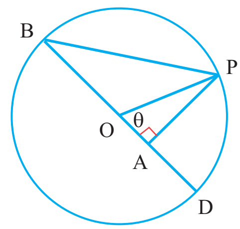
г) Проверьте результаты пунктов *a* и *b* при помощи калькулятора.

24. Докажите тождества.

а) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

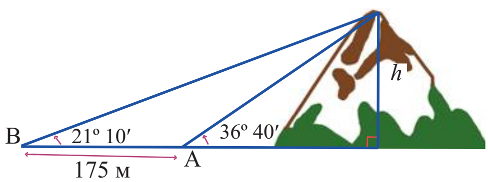
Прикладные задания

25. **Геометрия.** По данным на рисунке, докажите справедливость тождества $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ для единичной окружности с центром в точке O.



26. Чтобы найти высоту горы, на плане, выбраны две точки A и B, расстояние между которыми равно 175 м, и измерены углы подъёма, которые соответственно равны $\angle A = 36°40'$, $\angle B = 21°10'$.

Чему равна высота горы ?



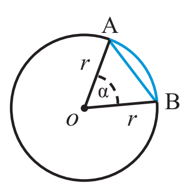
27. Если точки A, B,C являются вершинами ΔABC, то докажите справедливость следующих тождеств (учтите, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$).

а) $\sin(A + B) = \sin C$

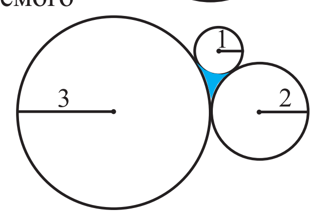
б) $\cos C = \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$

28. а) Докажите справедливость формулы $S_{\text{сег.}} = \dfrac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha)$ для нахождения площади сегмента.

б) Радиус круга на рисунке равен 2 см, а длина хорды 3 см. Найдите площадь сегмента, отсекаемого хордой.



29. Три окружности касаются внешним образом, как показано на рисунке. Найдите площадь закрашенной части, если их радиусы соответственно равны 1; 2; 3.



Упрощение тригонометрических выражений

Пример 1. Раскроем скобки и упростим выражение

$\cos x\,(\operatorname{tg} x - \sec x) =$

$= \cos x \cdot \operatorname{tg} x - \cos x \cdot \sec x =$ *по распределительному закону умножения*

$= \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} =$ *упрощение при помощи замены* $tg\, x = \dfrac{sin\, x}{cos\, x}$ *и* $sec\, x = \dfrac{1}{cos\, x}$

$= \sin x - 1$

Пример 2. Разложим на множители и упростим выражение.

$\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$

$= \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$ *вынесем общий множитель за скобку*

$= \cos^2 x \cdot 1 = \cos^2 x$ *применив формулу* $sin^2 x + cos^2 x = 1$

Пример 3.

Упростим рациональное выражение, содержащее тригонометрические функции.

$\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} =$ *заменим* $tg\, x = \dfrac{sin\, x}{cos\, x}$

$= \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1 + \sin x}{1 + \sin x} =$ *умножим числитель и знаменатель на одно и тоже число*

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *приведём к общему знаменателю*

$= \dfrac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *применим тождество* $sin^2 x + cos^2 x = 1$

$= \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ *упростим*

Пример 4. Освободим знаменатель от радикала $\sqrt{\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}}$

Здесь $\operatorname{tg} x > 0$.

$$\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}$$

Обучающие задания

1. Раскройте скобки и упростите выражение.

1) $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$
2) $\operatorname{tg} x\,(\cos x + \operatorname{ctg} x)(1 - \sin x)$
3) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin 2\alpha$
4) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - \sec^2 \alpha$

2. Разложите на множители.

1) $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$
2) $\sin^4 x - \cos^4 x$
3) $\sin^3 x + 27$
4) $4\sin^2 y + 8\sin y + 4$
5) $3\operatorname{ctg}^2 \beta + 6\operatorname{ctg} \beta + 3$
6) $2\cos^2 x + \cos x - 3$

Упрощение тригонометрических выражений

3. Упростите.

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}$ 2) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 3) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

4) $\dfrac{4\cos^3 x}{\sin^2 x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{4\cos x}\right)^2$ 5) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2}{2\sin\alpha - 4}$ 6) $\dfrac{\sin^2\alpha - 9}{2\cos\alpha + 1}\cdot\dfrac{10\cos\alpha + 5}{3\sin\alpha + 9}$

4. Представьте выражение в виде множителей, содержащих одноимён-ную функцию (например, $(\sin x - 3)(1 + 2\sin x)$) .

1) $\cos^2 x + 2\cos x + 1$ 2) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$ 3) $\sin x - \cos^2 x - 1$

5. Освободитесь от радикала в знаменателе.

а) $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$ б) $\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ в) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{\sin x}}$

6. Упростите.

а) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha$ б) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$

в) $\dfrac{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ г) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

7. Докажите тождества.

1) $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{tg}\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\operatorname{ctg}\theta} = \sin\theta + \cos\theta$ 2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} + 1 = 2\cos^2\theta$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta} + 1 = 2\sin^2\theta$ 4) $\operatorname{tg}\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta$

5) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$ 6) $\dfrac{1-\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\cos^4\alpha$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения.

а) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$ б) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$ в) $\sin\alpha + \cos\alpha$

Указание: Запишите выражение $a\sin x + b\cos x$ в виде $c\cdot\left(\dfrac{a}{c}\cdot\sin x + \dfrac{b}{c}\cdot\cos x\right)$ и введите вспомогательные углы: $\dfrac{a}{c} = \cos\varphi$ и $\dfrac{b}{c} = \sin\varphi$. Здесь $c = \sqrt{a^2+b^2}$

Пример. $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) =$
$= 2(\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha + \sin 60^\circ\cdot\cos\alpha) = 2\sin(\alpha + 60^\circ)$ НБЗ$= 2$ НМЗ $= -2$

9. Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, найдите значение выражения $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$

10. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$, если

а) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ б) $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

11. Найдите значение выражения $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ$.

Обобщающие задания

1. Углы треугольника относятся как 2 : 3: 5.Найдите радианные меры углов.

2. Имеет ли смысл выражение?

а) $\sqrt{\sin 170^\circ}$ б) $\sqrt{\cos 150^\circ}$ в) $\sqrt{\text{tg } 200^\circ}$

3. Какой четверти принадлежит угол α, если $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$?

4. Докажите, что $\text{tg } 1^\circ \cdot \text{tg } 2^\circ \cdot \text{tg } 3^\circ \cdot \ldots \cdot \text{tg } 87^\circ \cdot \text{tg } 88^\circ \cdot \text{tg } 89^\circ = 1$

5. Выразите через a, если $\sin 10^\circ = a$:

а) $\cos 80^\circ$ б) $\cos 100^\circ$ в) $\sin 170^\circ$ г) $\sin 190^\circ$

6. Вычислите не используя калькулятор.

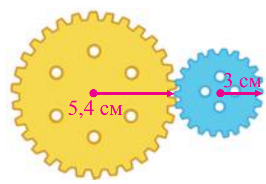
а) $\dfrac{2\text{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1-\text{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}$ б) $4\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}$

7. Какое из равенств верное, а какое ложное?

а) $\sin 151^\circ = \sin 29^\circ$ б) $\cos 135^\circ = \sin 225^\circ$ в) $\text{tg } 135^\circ = \text{tg } 225^\circ$

г) $\sin 60^\circ = \cos 330^\circ$ д) $\sin 270^\circ = \cos 180^\circ$ е) $\cos(-60^\circ) = -\sin 330^\circ$

8. Радиус одного зубчатого колеса равен 5,4 см, а радиус другого 3 см. Если маленькое колесо поворачивается на угол 170º, то на какой угол при этом поворачивается большое колесо?



9. а) Система для полива может совершать поворот на угол 140° и при этом струя имеет длину 35 м. Схематично изобразите ту часть, которую может полить система и найдите её площадь.

б) На какой угол должна поворачиваться система для полива площади в 3000 м², если длина струи равна 70 м?

10. Докажите.

$\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x-\cos x} = -\text{ctg}2x$ $\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{\cos 2x+\cos 4x} = \text{tg}3x$

$\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x} = \text{tg}2x$ $\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin 4x} = \text{tg}3x$

11. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta = 90^\circ$.

12. Докажите, что: а) $\cos(60^\circ-\alpha) = \sin(30^\circ+\alpha)$

б) $\text{ctg}(80^\circ-\alpha) = \text{tg}(10^\circ+\alpha)$.

13. Покажите, что : $\dfrac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\cos 31^\circ+\sin 11^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}$

Обобщающие задания

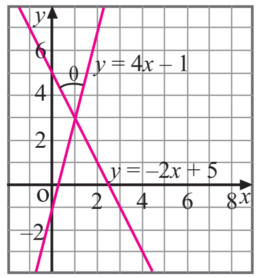
14. Найдите значение выражения $\left|\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\right|$, если $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}4$.

15. Найдите значение выражения.

а) $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)$

б) $\sin\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos^3\dfrac{\pi}{16} - \sin^3\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos\dfrac{\pi}{16}$

16. Найдите острый угол, между двумя пересекающимися прямыми $y = 4x - 1$ и $y = -2x + 5$.



17. Вычислите.

а) $\dfrac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$

б) $8 \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$

18. Упростите: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \cdot \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$

19. Если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin\beta = -\dfrac{1}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, найдите значение выражений:

а) $\sin(\alpha + \beta)$ б) $\cos(\alpha + \beta)$ в) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

г) $\sin(\alpha - \beta)$ д) $\cos(\alpha - \beta)$ е) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

20. Упростите.

а) $\dfrac{6 \cos 64^\circ}{\sqrt{3} \cos 34^\circ - \sin 34^\circ}$ б) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sqrt{3} \sin 36^\circ}{4 \cos 24^\circ}$

21. Распылитель (лейка) распыляет воду на объект под углом α на расстояние d.

а) Докажите, что площадь полива находится по формулам $S = \pi d^2 \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$, а также $S = \dfrac{\pi d^2(1 - \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha}$

б) Какова площадь полива, если угол распыления $\alpha = 45^\circ$, а расстояние $d = 30$ см?

22. 1) Докажите тождества. а) $\sin 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ б) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

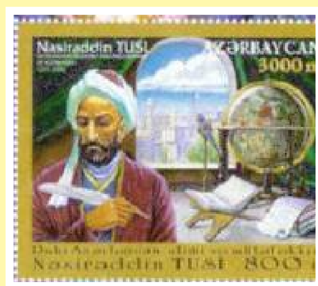
2) Если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, то найдите: а) $\sin 2\alpha$ б) $\cos 2\alpha$

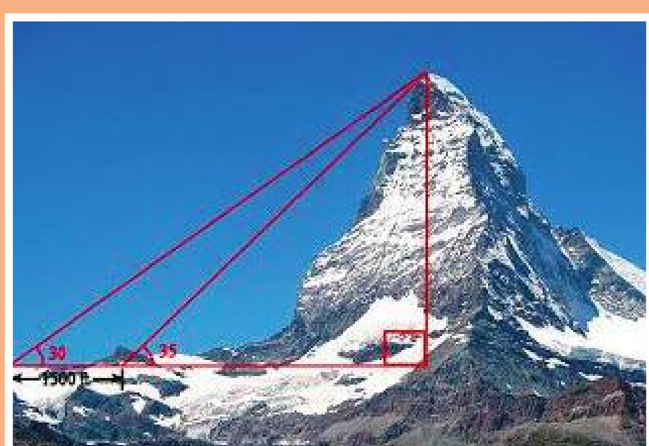
4 Теоремы синусов и косинусов

Теорема синусов

Теорема косинусов

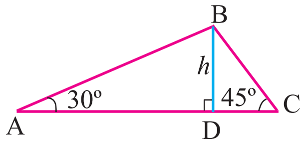
Живший в XII веке и занимающий особое место в истории человечества великий азербайджанский учёный Насреддин Туси сделал особый вклад в астрономию, математику и философию. Насреддин Туси, впервые отделил тригонометрию от астрономии, и представил доказательство теоремы синусов.





Теорема синусов

Практическая работа



1) По данным рисунка выразите стороны AB и BC через высоту h треугольника ABC.

2) Проверьте справедливость равенства.

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}$$

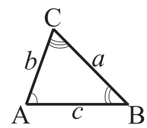
3) Выразите длину стороны AC через h и зная, что $\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ вычислите $\sin\angle B$.

4) Найдите отношение $\dfrac{AC}{\sin\angle B}$ и сравните его результат с результатом пункта 2.

5) Есть ли связь между сторонами ΔABC и синусами противолежащих углов.

Теорема синусов

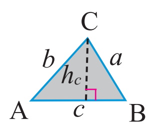
Для произвольного ΔABC со сторонами a, b, c и соответствующими противолежащими углами $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ имеет место:



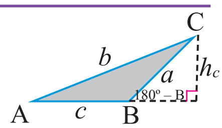
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin\angle A} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin\angle B} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin\angle C}$$

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство: Справедливость теоремы для прямоугольного треугольника покажите самостоятельно. Докажем теорему для остроугольного и тупоугольного треугольников.



остроугольный треугольник



тупоугольный треугольник

Из вершины C треугольника проведём к стороне AB высоту h_c. Получим два прямоугольных треугольника, для которых имеем $\dfrac{h_c}{b} = \sin\angle A$ и $\dfrac{h_c}{a} = \sin\angle B$.

Из тупоугольного треугольника имеем: $\dfrac{h_c}{a} = \sin(180 - \angle B) = \sin\angle B$.

Найдём из этих отношений h_c: $h_c = b\sin\angle A$, $h_c = a\sin\angle B$

Отсюда получаем, что: $b\sin\angle A = a\sin\angle B$ или $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$

По аналогичному правилу, если провести высоту из вершины угла A на сторону BC, то можно показать, что $\dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$

По свойству равенства имеем: $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$

Теорема доказана.

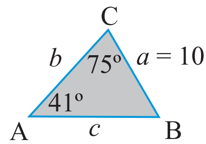
Обратите внимание, что эти отношения равны диаметру описанной вокруг треугольника окружности.

Следствия. 1) В треугольнике, напротив равных углов лежат стороны, длины которых равны.
2) В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона, а напротив большей стороны лежит больший угол.

На самом деле, для острых углов α и β , если $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$. Так как $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$, то $a > b$. Для тупого угла α угол $(180^o - \alpha)$ является острым, а также угол $(180^o - \alpha)$ является внешним углом треугольника не смежными с углом β и больше него.

Поэтому, $\sin\alpha = \sin(180^o - \alpha) > \sin\beta$. Отсюда снова получаем, что $a > b$.

Если для треугольника заданы два угла и одна сторона, две стороны и угол, противолежащий одной из сторон, то применив теорему синусов, можно найти остальные стороны и углы.



I случай. Даны два угла и одна сторона треугольника.

Пример 1. В ΔABC $a = 10$, $\angle A = 41°$, $\angle C = 75°$

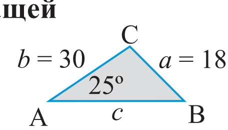
Решение: Зная, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°, по двум заданным углам найдём третий, а по теореме синусов неизвестные стороны.

$$\angle B = 180 - (\angle A + \angle C) = 180 - (41° + 75°) = 64°$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \Rightarrow b = \frac{a\sin\angle B}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin64°}{\sin41°} \approx \frac{10\cdot0{,}899}{0{,}656} \approx 13{,}7$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C} \Rightarrow c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin75°}{\sin41°} \approx \frac{10\cdot0{,}966}{0{,}656} \approx 14{,}7$$

II случай. Даны две стороны и угол, противолежащей одной из сторон.



Пример 2. 1) В ΔABC $a = 18$, $\angle A = 25°$, $b = 30$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \quad \sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{30\cdot\sin25°}{18} \quad \sin\angle B = 0{,}7044$$

Введём число 0,7044 в калькулятор и нажмём кнопку со знаком $\boxed{\sin^{-1}}$.

Увидим, что угол B равен 44,8°: $\angle B \approx 44{,}8°$

Однако, зная, что $\sin\angle B = \sin(180 - \angle B)$, тогда получается, что у угла B есть ещё второе значение: $\angle B \approx 180° - 44{,}8° = 135{,}2°$: $\angle B \approx 135{,}2°$

Для $\boxed{\angle B = 44{,}8°}$

$$\angle C = 180° - (25° + 44{,}8°) = 110{,}2°$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

$$c = \frac{18\sin110{,}2°}{\sin25°} \approx \frac{10\cdot0{,}938}{0{,}423} \approx 40$$

Для $\boxed{\angle B = 135{,}2°}$

$$\angle C = 180° - (25° + 135{,}2°) = 19{,}8°$$

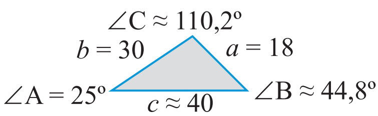
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

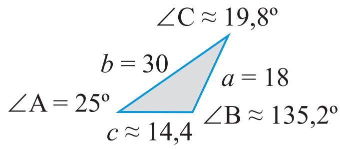
$$c = \frac{18\sin19{,}8°}{\sin25°} \approx \frac{10\cdot0{,}938}{0{,}423} \approx 14{,}4$$

Таким образом, для заданных значений существует два треугольника.

1. $\angle B \approx 44{,}8°$, $\angle C \approx 110{,}2°$, $c \approx 40$



2. $\angle B \approx 135{,}2°$, $\angle C \approx 19{,}8°$, $c \approx 14{,}4$



Рассмотрим для II случая следующую ситуацию.

1) Пусть в $\triangle ABC$ $a = 5$, $\angle A = 30°$, $b = 12$

По теореме синусов

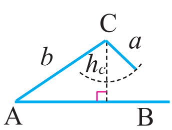
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \qquad \sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{12\cdot\sin 30°}{5} = 1{,}2$$

$\sin\angle B = 1{,}2$ Так как $|\sin\angle B| \le 1$, то он не может принимать значение 1,2.

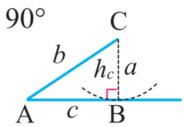
Значит, такой треугольник не существует.

Количество возможных решений треугольников по двум сторонам и одному углу может меняться в зависимости от значений длины сторон и вида угла (градусной меры).

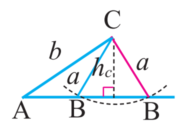
Для $\angle A < 90°$



а) $a < h_c < b$
решений нет

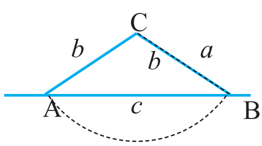


б) при $a = h_c < b$
одно решение

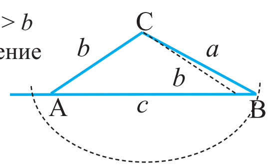


в) при $h_c < a < b$
два решения

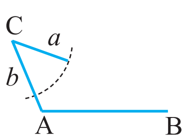
г) при $a = b$
одно решение



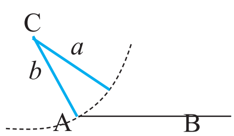
д) при $a > b$
одно решение



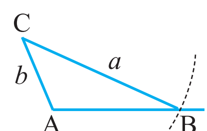
Для $\angle A \ge 90°$



а) при $a < b$
решений нет



б) при $a = b$ решений нет



в) при $a > b$
одно решение

Обучающие задания

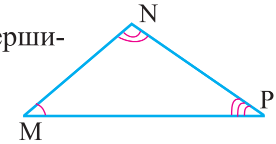
1. Найдите неизвестные вершины и стороны.

а) $\dfrac{b}{\sin 45°} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 30°}$ б) $\dfrac{a}{\sin 35°} = \dfrac{10}{\sin 40°}$

в) $\dfrac{\sin\angle B}{6} = \dfrac{\sin 60°}{3\sqrt{6}}$ г) $\dfrac{\sin\angle A}{25} = \dfrac{\sin 62°}{32}$

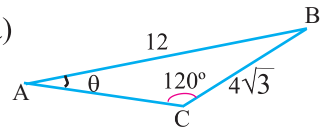
Теорема синусов

2. Запишите теорему синусов для треугольника с вершинами M, N, P.

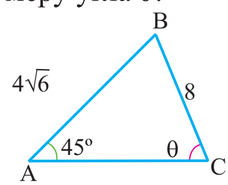


3. По данным рисунка найдите градусную меру угла θ.

а)

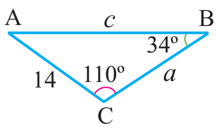


б)

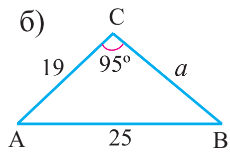


4. Найдите неизвестные углы и стороны.

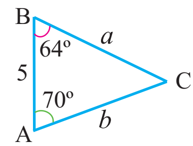
а)



б)



в)



5. Установите, выполнив соответствующие вычисления, в каком случае можно построить два или один треугольник, а в каком решения не существует.

1) $a = 10$, $\angle A = 35°$, $\angle B = 25°$
2) b = 40, $\angle B = 75°$, c = 35
3) $\angle A = 40°$, $\angle B = 45°$, $c = 15$
4) $a = 5$, $\angle A = 42°$, $b = 7$
5) $a = 40$, $\angle A = 25°$, $c = 30$
6) $a = 5$, $\angle A = 47°$, $b = 9$
7) $a = 12$, $\angle A = 94°$, $b = 15$
8) $a = 15$, $\angle A = 94°$, $b = 12$
9) $a = 22$, $\angle A = 50°$, $c = 27$
10) $a = 11$, $\angle A = 50°$, $c = 20$

6. Изобразите треугольник согласно равенству $\dfrac{x}{\sin 60°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$. Найдите значения *x*.

7. Изобразите △ ABC и найдите неизвестную сторону.

а) **Дано:** △ ABC, $\angle A = 57°$, $\angle B = 73°$, AB = 24 см.
AC = ?

б) **Дано:** △ABC, $\angle B = 38°$, $\angle C = 56°$, BC = 63 см
AB = ?

в) **Дано:** △ ABC, $\angle A = 50°$, $\angle B = 50°$, AC = 27 м, AB = ?

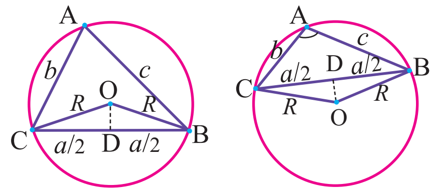
г) **Дано:** △ ABC, $\angle A = 23°$, $\angle C = 78°$, AB = 15 см, BC = ?

8. а) В △ABC AC = 7 см, AB = 11 см, $\angle B = 25°$. Найдите $\angle C$.
б) В △KLM LM = 16,8 см, KM = 13,5 см, $\angle K = 56°$. Найдите $\angle L$.
Верно ли, что для каждой из задач, при решении будем искать два угла "один острый" ,"один тупой"?

Теорема синусов

9. Одна из сторон треугольника равна 43 м, а другая 11 м. Угол, лежащий напротив одной из сторон, равен 35°. Найдите неизвестную сторону и углы треугольника.

10. Докажите теорему синусов при помощи треугольников, вписанных в окружность на рисунке.



План для доказательства: Сначала покажите справедливость равенства $\dfrac{a}{\sin\angle A} = 2R$, а затем, аналогичным образом, равенств $\dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$ и $\dfrac{c}{\sin\angle C} = 2R$.

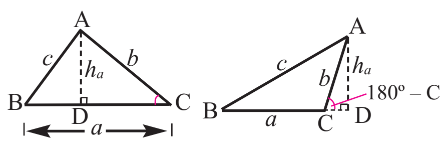
11. Для более точного измерения кроме градусных единиц, используют более маленькие единицы, такие как минута (′) и секунда (″). Приняв $1° = 60'$, $1' = 60''$ выразите в виде десятичной дроби градусные измерения углов.
а) $20°15'36''$ б) $45°12'18''$ в) $45°20'54''$

12. По формуле площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\angle B$$

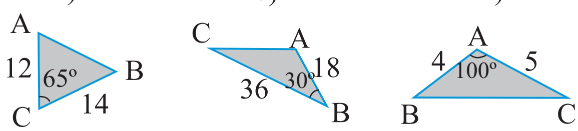


По следующим данным найдите площадь треугольника.

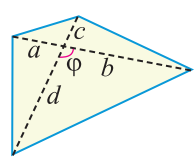
1) $\angle B = 42°$, $a = 6$ м, $c = 8$ м 2) $\angle A = 17°\ 12'$, $b = 10$ см, $c = 13$ см

3) $\angle C = 82°\ 54'$, $a = 4$ дм, $b = 6$ дм 4) $\angle C = 75{,}16°$, $a = 1{,}5$ м, $b = 2{,}1$ м

5) 6) 7)



13. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей и синуса угла между диагоналями.



$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

14. а) Найдите площадь параллелограмма со сторонами 10 см и 12 см, если угол между ними равен 60°.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если диагонали трапеции равны $12\sqrt{2}$ см, а угол между ними равен 45°.

Теорема синусов

15. Заполните двухстолбчатую таблицу доказательством теоремы синусов. Перепишите доказательство в тетрадь.

Предположение	Обоснование
$\frac{1}{2}bc\sin\angle A=\frac{1}{2}ac\sin\angle B=\frac{1}{2}ab\sin\angle C$	
$bc\sin\angle A=ac\sin\angle B=ab\sin\angle C$	
$\frac{bc\sin\angle A}{abc}=\frac{ac\sin\angle B}{abc}=\frac{ab\sin\angle C}{abc}$	
$\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c}$	
$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$	

18. Для каждого возможного случая, изобразите соответствующий треугольник.

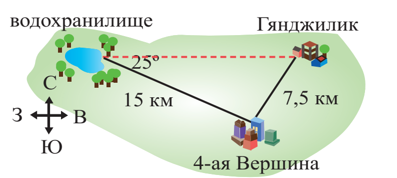
а) Найдите какому интервалу должна принадлежать сторона BC в ΔABC, чтобы задача имела два решения для $\angle A = 30°$ и $AC = 50$ см.

б) Найдите какому интервалу должна принадлежать сторона BC в ΔABC, чтобы задача не имела решения для $\angle A = 60°$ и $AC = 12\sqrt{3}$ см.

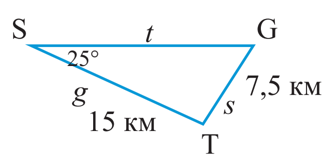
в) Найдите какому интервалу должна принадлежать сторона BC в ΔABC,чтобы задача имела одно решение для $\angle A = 45°$ и $AC = 18\sqrt{2}$ см.

Прикладные задания.

Пример. Водохранилище находится от комплекса 4-ая Вершина на расстоянии 15 км по направлению на северо-запад под углом 25°. Комплекс Гянджилик находится на расстоянии 7,5 км в направлении на северо-восток от комплекса 4-ая Вершина. Найдите расстояние от Гянджилика до водохранилища.



Решение: Согласно плану изобразим треугольник, вершинам которого соответствуют буквы объектов: водохранилище - S, 4-ая Вершина - T, Гянджилик - G. Соответствующие расстояния обозначим буквами s, t и g.



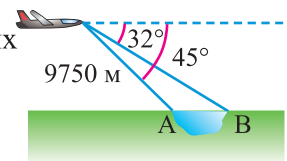
По теореме синусов:

$$\frac{s}{\sin\angle S}=\frac{g}{\sin\angle G},\quad \frac{7{,}5}{\sin 25°}=\frac{15}{\sin\angle G},\quad \sin\angle G=\frac{15\cdot\sin 25°}{7{,}5}\approx\frac{15\cdot 0{,}4226}{7{,}5}=0{,}8452$$

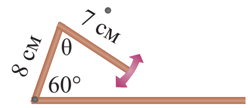
$$\angle G\approx 58°,\qquad \angle T\approx 180°-25°-58°\approx 97°$$

$$\frac{s}{\sin\angle S}=\frac{t}{\sin\angle T},\frac{7{,}5}{\sin 25°}\approx\frac{t}{\sin 97°},\quad t\approx\frac{7{,}5\cdot\sin 97°}{\sin 25°}\approx\frac{7{,}5\cdot 0{,}9925}{0{,}4226}\approx 17{,}6\text{ км}$$

17. Наблюдение с самолёта зафиксировало, что углы снижения для двух точек A и B на противоположных берегах озера соответственно равны 45° и 32°. По данным на рисунке, найдите, приблизительно, расстояние между точками наблюдения.

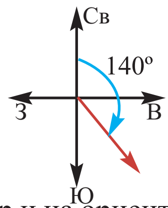


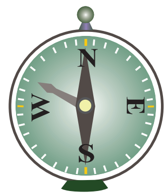
18. Часть деревянной конструкции длиной 8 см образуют угол 60º с основанием. Другая часть, длиной 7 см, соединена с концом первой и закреплена с основанием. По рисунку, найдите возможную градусную меру угла θ.



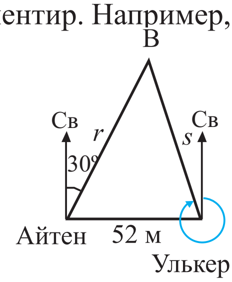
основание конструкции

19. **Навигация** - занимается определением места расположения и курса движения морского и воздушного транспорта. Обычно, в навигации направление определяется при помощи азимута. Азимут — это угол, отсчитанный по ходу движения часовой стрелки между направлениями на север и на ориентир. Например, азимут на рисунке равен 140°.

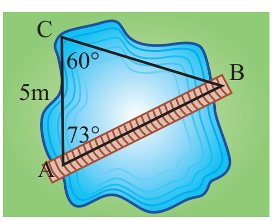




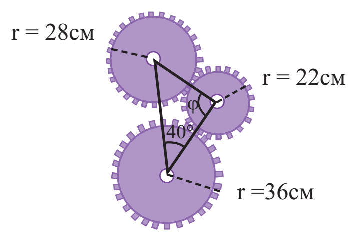
Парусник, в котором находится Улькер, находится на расстоянии 52 м от парусника Айтен в восточном направлении. Айтен видит научную станцию, занимающуюся наблюдением за обитателями моря, по азимуту 30°, а Улькер по азимуту 320º. На каком расстоянии от станции находится Улькер?



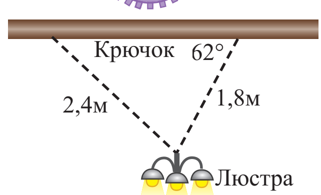
20. **Мостостроение.** Какой длины должен быть мост, который нужно построить по данным на рисунке?



21. **Конструкция.** Найдите угол φ зубчатой конструкции на рисунке.



22. Люстра закреплена к крючку цепями на расстоянии 1,8 м и 2,4 м. Цепь, длиной 1,8 м образует с плоскостью крепления угол 62º . Найдите какой угол образует с этой плоскостью другая цепь.



Теорема косинусов

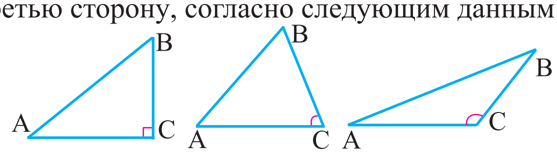
Исследование 1. Выполните следующие задания для каждого треугольника с заданными размерами:

1) Запишите углы треугольника в порядке возрастания.

2) Можно ли найти неизвестные стороны или углы применив теорему синусов?

Исследование 2. 1) В тетради изобразите треугольники по двум сторонам и углу между ними и измерьте третью сторону, согласно следующим данным.

1. $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$
2. $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\angle C = 60^\circ$
3. $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\angle C = 120^\circ$



2) Для полученных треугольников заполните таблицу

Стороны треугольника (см)	c^2	$a^2 + b^2$	$2ab\cos\angle C$
$a = 3$, $b = 4$, $c = 5$			
$a = 3$, $b = 4$, $c =$ ■			
$a = 3$, $b = 4$, $c =$ ■			

3) Сравните значения выражений $a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ и c^2.

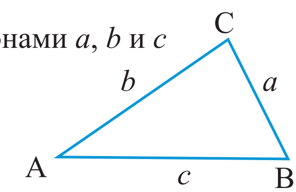
Теорема косинусов

Для произвольного треугольника ABC со сторонами a, b и c

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A}$

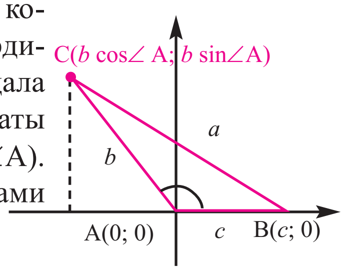
$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B}$

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C}$



Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между сторонами.

Доказательство: Для доказательства теоремы косинусов расположим треугольник ABC в координатной плоскости так, чтобы вершина A совпадала с началом координат. В этом случае координаты вершин равны: A(; 0), B(c; 0), C($b\cdot\cos\angle A$; $b\cdot\sin\angle A$). По формуле расстояния между двумя точками имеем:

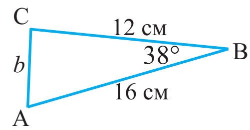


$$a^2 = (c - b\cos\angle A)^2 + (b\sin\angle A - 0)^2 =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2\cos^2\angle A + b^2\sin^2\angle A =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2(\cos^2\angle A + \sin^2\angle A) = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$$

Таким образом, мы доказали, что: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$.
Доказать эту формулу для других сторон, можно расположив другие вершины (B и C) в начале координат.
Замечание: Пусть $\angle C = 90°$. Так как $\cos 90° = 0$,то формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\angle C$ будет выглядеть так: $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. выражает теорему Пифагора. Поэтому теорему косинусов называют обобщённой теоремой Пифагора

Пример 1. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Решите треугольник, если в ΔABC $a = 12$ см, $c = 16$ см, $\angle B = 38°$.
Решение.



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$ ***теорема косинусов***

$b^2 = 144 + 256 - 2\cdot 12\cdot 16\cdot\cos 38°$ ***запишем значения a, c и ∠B***

$b^2 \approx 97{,}4$ ***упрощаем***

$b \approx \sqrt{97{,}4} \approx 9{,}87$ (см) ***получаем квадратный корень***

Если известны три стороны и один из углов треугольника, то можно применить теорему синусов. Найдём угол A. Известно, если сторона a меньше стороны c, то угол напротив этой стороны также будет меньшим, то есть $\angle A$ не может быть тупым.

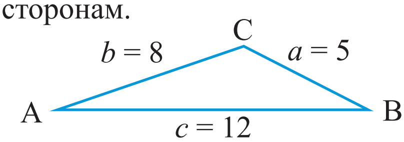
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \qquad \frac{12}{\sin\angle A} = \frac{9{,}87}{\sin 38°} \qquad \sin\angle A = \frac{12\sin 38°}{9{,}87} \approx 0{,}7485$$

Нажмите кнопку $\sin^{-1}$ на калькуляторе и введите число 0,7485, тогда можно найти $\angle A = \sin^{-1}(0{,}7485) \approx 48{,}5°$. Теперь, для треугольника ABC известны три стороны и два угла. Третий угол можно найти из формулы суммы внутренних углов треугольника:

$180° - 38° - 48{,}5° = 93{,}5°$, $\qquad \angle C \approx 93{,}5°$

$a = 12$ см, $b \approx 9{,}87$ см, $c = 16$ см, $\angle A \approx 48{,}5°$, $\angle B = 38°$, $\angle C \approx 93{,}5°$

Пример 2. Решим треугольник по трём сторонам.
В ΔABC $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см.
Решение.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \cos\angle A = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2\cdot 8\cdot 12} = \frac{183}{192} \approx 0{,}9531$$

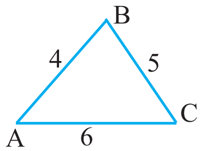
$\angle A \approx \cos^{-1}(0{,}9531) \approx 18°$

По тому же правилу находим углы для вершин B и C.

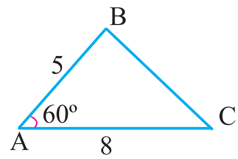
Теорема косинусов

Обучающие задания

1. Найдите углы треугольника, зная его стороны. Результат округлите до десятых.

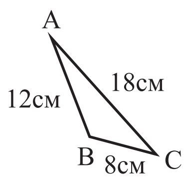


2. Найдите неизвестную сторону и углы треугольника, по двум заданным сторонам и углу между ними.

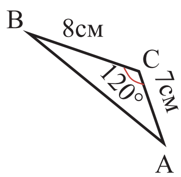


3. Решите треугольники. Результат округлите до сотых.

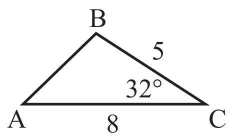
а)



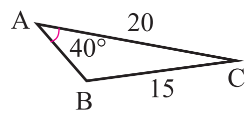
б)



в)



г)



4. Найдите неизвестные по условию. Результат округлите до десятых.

1) Дано: ΔABC
$a = 27, b = 22$
$\angle C = 40°$,
Найдите: сторону c

2) Дано: ΔABC,
$a = 18, c = 15$
$\angle B = 110°$.
Найдите: сторону b

3) Дано: ΔABC,
$a = 9, b = 10, c = 11$.
Найдите : $\angle A$

4) Дано: $\Delta\ ABC$,
$a = 120, b = 90, c = 105$.
Найдите: наибольший угол треугольника.

5) Дано: $\Delta\ ABC$,
$a = 16, b = 21, c = 19$.
Найдите : наименьший угол треугольника.

5. а) Найдите большую высоту треугольника со сторонами:
5 м, 6 м и 7 м.

б) Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами:
13 см, 14 см и 15 см.

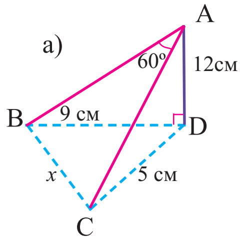
в) Найдите медианы треугольника со сторонами;
10 см, 12 см и 14 см.

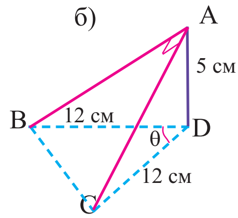
6. Решите ΔABC, с помощью теорем синусов, косинусов и Пифагора. Результат округлите до сотых.

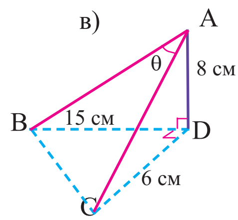
а) $A = 96°, B = 39°, b = 13$
б) $A = 34°, b = 17, c = 48$
в) $A = 48°, B = 51°, c = 36$
г) $C = 104°, b = 11, c = 32$
д) $a = 48, b = 51, c = 36$
е) $C = 90°, a = 4, b = 11$

7. а) Острый угол параллелограмма равен 60º. Найдите диагонали параллелограмма, если стороны равны 6 см и 8 см.
б) Для параллелограмма докажите, что $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где a *и* b стороны параллелограмма с диагоналями d_1 и d_2.

8. Отрезок AD перпендикулярен плоскости ΔBCD. Найдите неизвестные по данным на рисунке.



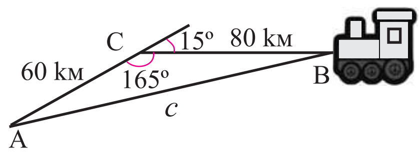




Прикладные задания

Пример. Поезд прошёл путь 60 км из пункта A в пункт C. После чего он изменил направление на 15º и прошёл ещё 80 км до пункта B. На сколько километров удалился поезд от пункта A?

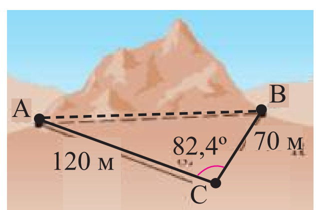
Решение: Изобразим решение задачи.



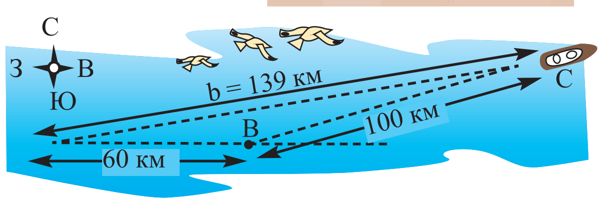
По рисунку видно, что в треугольнике известны две стороны и угол между ними.

Сторону c можно найти по теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$
$c^2 = 80^2 + 60^2 - 2{\cdot}80{\cdot}60 \cos 165° \approx 19273$; $c \approx 139$ км

9. Между точками горы A и B планируется построить туннель. По рисунку определите длину туннеля.

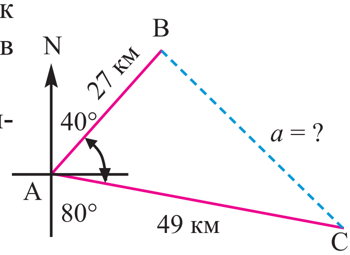


10. Судно проделало путь 60 км на восток, а затем изменило направление в сторону севера, как показано на рисунке, и прошло ещё 100 км.

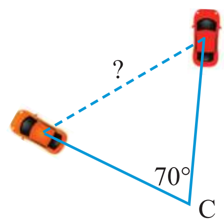


По рисунку определите угол азимута - угола, отсчитанного по ходу движения часовой стрелки между направлениями на север и на ориентир.

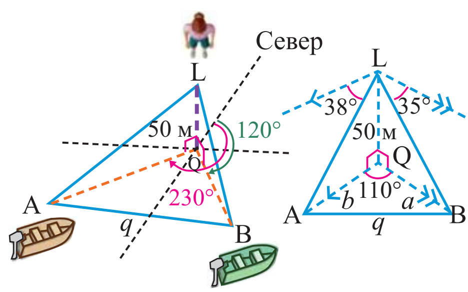
11. Два судна начали движении из точки A, как показано на рисунке. Первое пришло в пункт B, второе - в пункт C.
а) Найдите угол между направлениям движения судов.
б) Найдите расстояние между пунктами B и C.



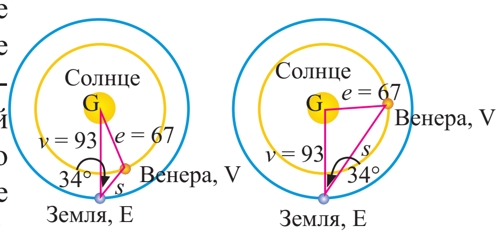
12. Угол между двумя автомобилями начавшими движение из одной точки равен 70°. Один из них движется со средней скоростью 35 км/ч, другой со скоростью 45 км/ч. Через 45 минут автомобили доезжают до места назначения. Найдите расстояние между автомобилями в конце движения.



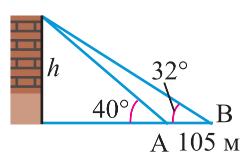
13. Лейла, стоя на мосту, с высоты 50 м наблюдает за движением лодок. Лодка A движется по азимуту 230°, а лодка B по азимуту 120°. Лейла видит лодки, приблизительно, под углом снижения 38° и 35° соответственно для лодок A и B. По этим данным, найдите расстояние между лодками.



14. **Астрономия.** Определённое время в году по утрам на небе можно наблюдать планету Венеру. Расстояние между Венерой и Солнцем приблизительно равно 67 млн. миль. Расстояние между Землёй и Солнцем 93 млн. миль. Если Солнце и Венеру можно наблюдать под углом 34° , то покажите, что расстояние между Землёй и Венерой равно или 35 млн. миль или 119 млн.миль.

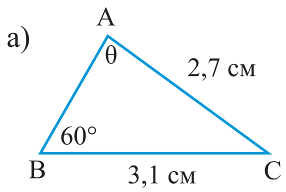


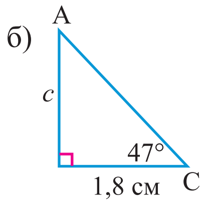
15. Наблюдение за некоторым объектом высотой h под углом подъёма 40° и 32° происходит из двух разных точек A и B, расстояние между которыми 105 м. Найдите высоту объекта.

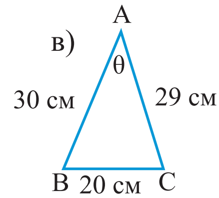


Обобщающие задания

1. Решите треугольники. Результат округлите до десятых.

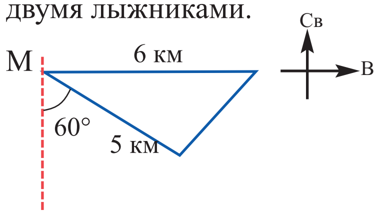




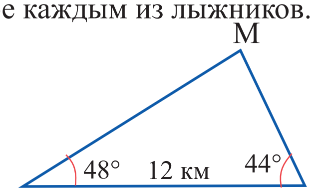


2. Два лыжника начали одновременно двигаться из точки M, как показано на рисунках. Решите следующие задачи:

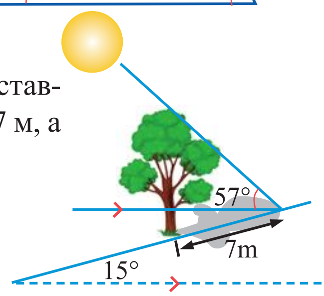
а) Найдите расстояние между двумя лыжниками.



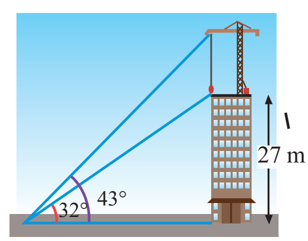
б) Найдите расстояние, пройденное каждым из лыжников.



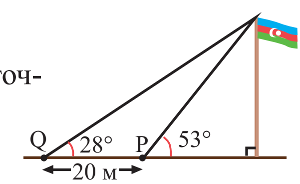
3. Найдите высоту дерева на опушке, если она составляет угол 15° с горизонтом, длина тени дерева 7 м, а угол подъёма солнечных лучей равен 57°.



4. а) Сколько метров составляет расстояние между наблюдателем, находящемся на земле и наивысшей точкой крана, используемого при строительстве здания. Угол подъёма под которым наблюдатель видит здание равен 32°, а угол подъёма под которым наблюдатель видит наивысшую точку крана равен 43°. Высота здания 27 м.



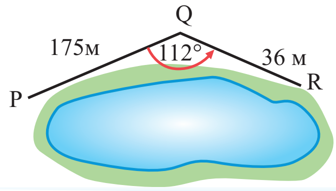
б) Эльдар хочет измерить высоту флага в парке. Для этого он измерил угол подъёма сначала из точки Q, а затем из точки P. Расстояние между точками P и Q оказалось равным 20 м.
Зная, что $\angle Q = 28°$ и $\angle P = 53°$, найдите высоту флага.



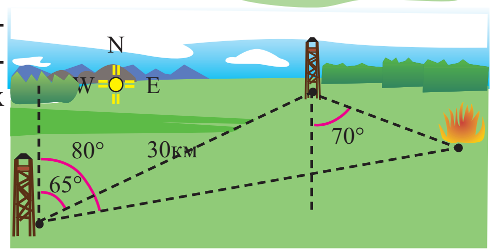
5. Ахмед и Рашад начали пробежку из одной точки в разных направлениях под углом 120°. Ахмед пробегает за час 8 км , а Рашад 7 км. Какое расстояние будет между ними через 30 минут? Решите задачу, изобразив соответствующий чертёж.

Обобщающие задания

6. Для того чтобы пройти из точки P в точку R, Ибрагим, сначала дошёл до точки Q, а оттуда в точку R. Найдите расстояние между точками P и R по данным на рисунке.



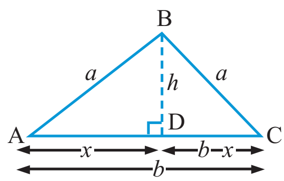
7. **Вычисление расстояния.** Найдите расстояние от очага возгорания до каждой из пожарных станций по данным на рисунке.

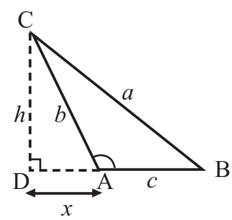


8. Докажите теорему косинусов,для треугольника на рисунке.

План для доказательства. 1) Выразите высоту h из ΔADB и ΔBDC и запишите равенство полученных выражений.

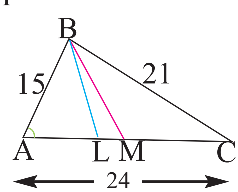
2) Используйте теорему Пифагора и тождество $\cos(180 - \angle A) = -\cos\angle A$.





9. Найдите градусную меру острого угла параллелограмма, если его стороны равны 10 см и 12 см, а меньшая диагональ равна 15 см.

10. Дано: ΔABC, $AB=15$, $BC=21$, $AC=24$
BM-медиана, BL-биссектриса.
Найдите:
1) $\angle A$ 2) AM и BM 3) AL и BL



11. Полицейский вертолёт летит на высоте 400 м. Если офицер полиции смотрит на север под углом снижения 20°, он видит место аварии, а если он смотрит на юг под углом снижения 15° , то он видит машину скорой помощи, движущуюся к месту происшествия.

а) На каком расстоянии от места происшествия находится машина скорой помощи?

б) Если скорость машины скорой помощи равна 100 км в час, то через сколько времени она достигнет места аварии?

12. Составьте задачу, отражающей реальную ситуацию, для решения которой нужно решить остроугольный треугольник. Обсудите задачу вместе с одноклассниками.

5 Тригонометрические функции

Периодические функции

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

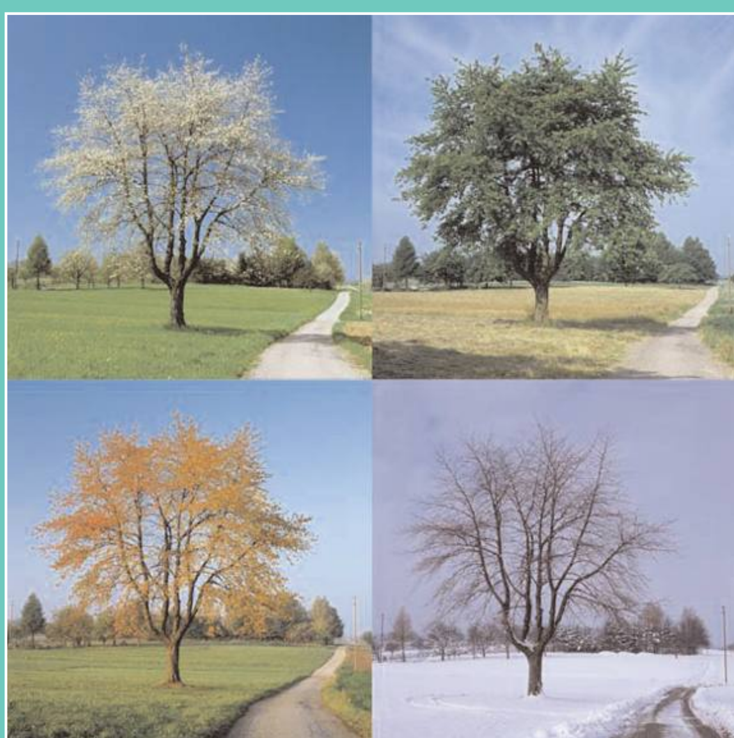
Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Построение синусоиды по пяти основным точкам

Тригонометрические функции и периодические события

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Обратные тригонометрические функции



Периодические функции

Периодические функции

Многие события, происходящие в природе - восход и закат солнца, появление комет, сезонные изменения температуры воздуха, всплеск и затухание волн в океане и т.п., являются циклически повторяющимися событиями. Процесс по производству оборудования, движение частей машины и т.д., так же могут быть заданы периодической функцией.
Исследуем периодические переменные на примере.

Работа станка по нарезке ленты. В фирме по производству измерительной ленты имеется станок, при помощи которого тонкая лента разрезается на кусочки по 3 м и сворачивается. График работы станка и описание принципа работы висит на стене.

Работа за один период

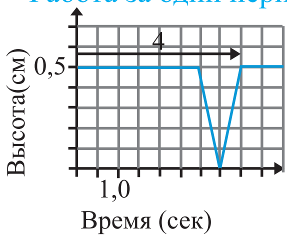
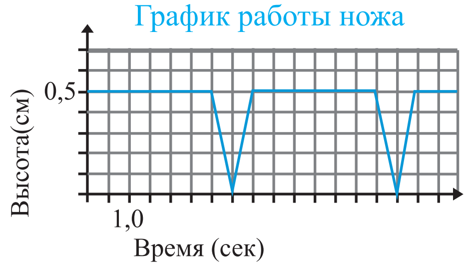
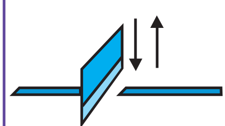


График работы ножа

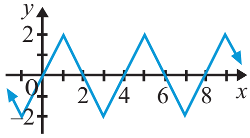


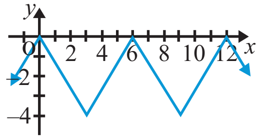


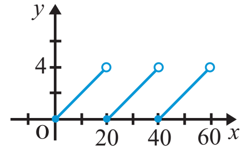
1. 0,5 см-наибольшая высота, на которую поднимается нож.
2. Нож бездействует 3 секунды, с 0-3, 4 -7 секунды и т.д.
3. Нож опускается вниз в интервале с 3 до 3,5 сек., отрезает ленту, и с 3,5 до 4 сек. нож поднимается вверх.
4. На один полный цикл тратится 4 секунды.

На какой, по вашему секунде, нож снова отрежет ленту?
Станок по изготовлению измерительной ленты циклически повторяет работу. Один цикл длится 4 секунды. График зависимости высоты ножа от времени, также соответствует одному циклу. В следующий раз нож разрежет ленту на 11,5 секунде. Такие функции называются циклическими (периодическими) функциями. Значения периодических функций повторяются на определённом интервале.
Пусть существует такое число $T \neq 0$, что для произвольного x из области определения функции $x \pm T$, также принадлежит области определения и удовлетворяют условию $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Тогда $f(x)$ называется периодической функцией и, если период равен T, то $n \cdot T$ также является периодом ($n \in Z$). На самом деле, например, $f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f((x \pm T) = f(x)$.
Наименьший положительный период функции называется его основным периодом.

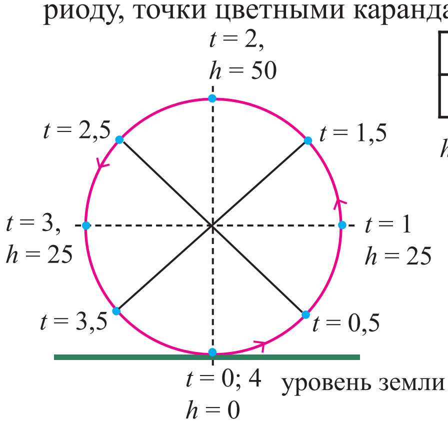
1. По графику определите является ли функция периодической?



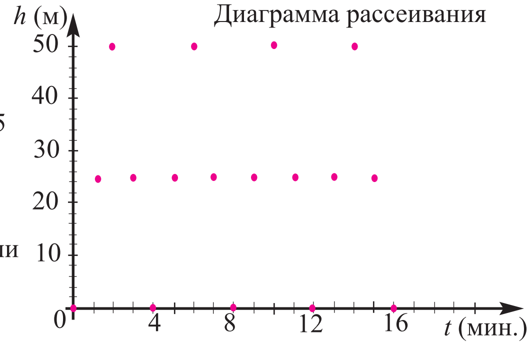




2. **Движение карусели.** Один оборот карусель, диаметром 50 м, совершает за 4 минуты. По таблице найдите, на какой высоте окажется человек в 1, 5, 9 минуту, если он сел в кабинку карусели на высоте $h = 0$? Зависимость высоты от времени для человека в кабинке, представлена в виде таблицы и диаграммы рассеивания. Начертите таблицу и диаграмму в тетрадь. Соедините, соответствующие каждому целому периоду, точки цветными карандашами.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	25	50	25	0	25	50	25	0



3. Вода может вытекать из бака за определённое время, затем бак наполняется до прежнего уровня, и вода снова начинает вытекать и т.д.

1) Сколько времени понадобится, чтобы заполнить и опустошить бак за 1 раз?

2) Запишите область значений функции.

3) Чему равна глубина воды в баке на 60-ой минуте?

4) Когда в следующий раз уровень воды в баке составит 1 м?

Периодичность тригонометрических функций

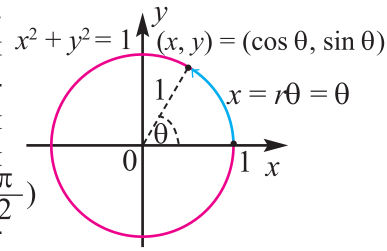
Можно увидеть, что при совпадении конечных сторон угла поворота, значения тригонометрических функций совпадают.

Например, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ для всех значений x. Значит, значения тригонометрических функций повторяются. Значения синуса и косинуса повторяются с периодом 2π, а тангенса и котангенса с периодом π. Тригонометрическими функциями числового аргумента x называются одноименные тригонометрические функции угла равного x радиан. Все свойства функций для угла (чётность и нечётность, периодичность и т.д.) одинаковы для тригонометрических функций от числового аргумента. Чтобы построить график этой функции, достаточно изобразить его на отрезке, длина которого равна периоду, а затем повторить его.

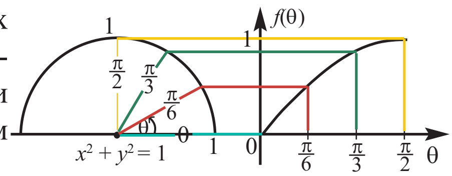
Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

График функции $y = \sin x$

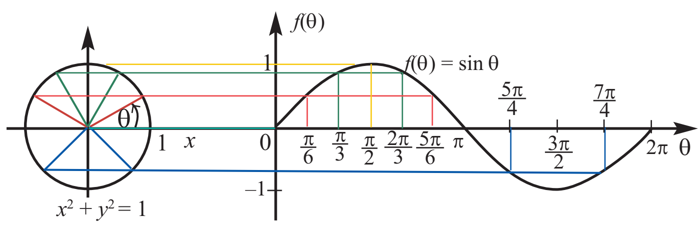
Периодическая функция $f(\theta) = \sin\theta$ при движении по окружности при повороте на угол θ показывает высоту (расстояние по вертикали) от оси x. На единичной окружности координата каждой точки равна $(x; y) = (\cos\theta; \sin\theta)$ и удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Здесь угол θ угол между единичным радиусом и положительным направлением оси x. Значит, координата y определяется $\sin\theta$.



Между дугой, которую описывает точка, и значениями функции $f(\theta) = \sin\theta$, существует однозначное соответствие. Разобъём дугу, принадлежащую I четверти на три равных дуги и в точках деления$(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Через точки пересечения прямых $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$, с соответствующими параллельными прямыми проведём сплошную линию. Получим график, как показано на рисунке.



Известно, что единичная окружность совершает полный оборот за 360° или 2π радиана. Построим, аналогичным образом, график функции $f(\theta) = \sin\theta$ на промежутке $[0; 2\pi]$:



Так как синус является периодической функцией, то на промежутке длиной 2π график $f(\theta) = \sin\theta$ будет повторятся заново. Если обозначить функцию через y, а аргумент через x, то можно записать $y = \sin x$. График функции $y = \sin x$ на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$ можно начертить, как показано ниже:

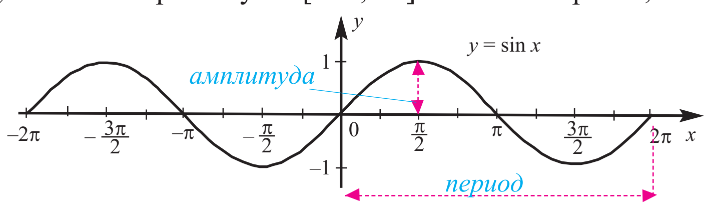


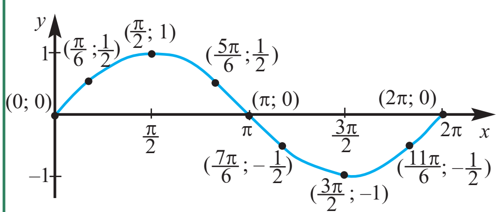
График функции $y = \sin x$ называется синусоидой (с амплитудой, равной 1, и периодом 2π).

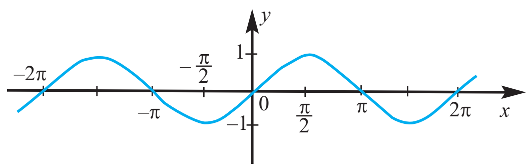
Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

График функции $y = \sin x$ можно построить при помощи таблицы значений.

Так как синус является периодической функцией, то достаточно построить этот график на отрезке $[0; 2\pi]$ длиной 2π. Отметим значение точек из таблицы на графике и проведём сплошную линию. Полученный график, является графиком функции $y = \sin x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$(x; y)$	$(0; 0)$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\pi; 0)$	$(\frac{7\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{11\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(2\pi; 0)$





Как из таблицы значений, так и по графику видно, что график функции, $y = \sin x$ проходит через точку $(0; 0)$ начало координат. При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значения y возрастают от 0 до1; при возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π значения y убывают от 1 до 0; при возрастании x от π до $\frac{3\pi}{2}$ значения y убывают от 0 до –1, при возрастании x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π значения y возрастают от –1 до 0.

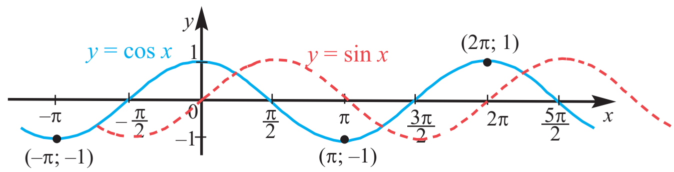
По таблице значений и графику функции $y = \sin x$ перечислим её свойства:

1. Область определения множество всех действительных чисел.
2. Область значений отрезок $[-1; 1]$.
3. Функция $\sin x$ нечётная: $\sin(-x) = -\sin x$, т.е. график симметричен относительно начала координат.
4. Функция периодическая с периодом 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. Синусоида пересекает ось абсцисс в точках ... , $-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi$, ..., и т.д., т.е. при $x = \pi n$ $(n \in Z)$ функция $y = \sin x$ обращается в нуль.
   Синусоида проходит через начало координат.
6. Наибольшее значение равное 1 функция принимает при x ... , $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \ldots$, т.е. при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.
7. Наименьшее значение равное –1 функция принимает при x ... , $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \ldots$, т.е. при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

График функции $y = \cos x$

График функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ можно построить аналогично графику функции $y = \sin x$ геометрическим способом, используя единичную окружность, а также при помощи таблицы значений. Так как $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, т.е. график можно построить переместив график функции $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ влево. Получаем график функции $y = \cos x$.



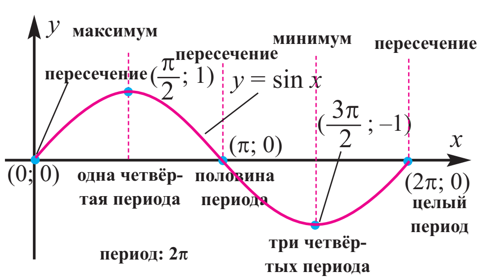
По графику перечислим свойства функции $y = \cos x$:

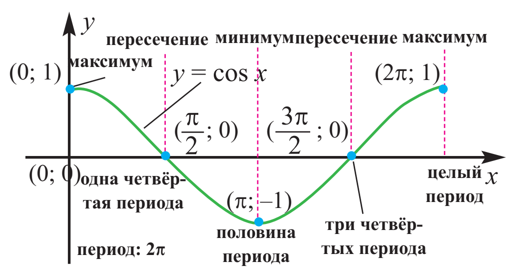
1. Область определения: множество всех действительных чисел $x \in$ R.
2. Область значений отрезок $[-1; 1]$.
3. Функция $y = \cos x$ чётная функция (график симметричен относительно оси y)
4. Функция периодическая с периодом 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5. График пересекает ось абсцисс в точках $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ т.д., т.е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ функция $y = \cos x$ обращается в нуль.
   График пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$.
6. Наибольшее значение равное 1 функция принимает
   при x $\ldots, -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi, 6\pi, \ldots$, т.е. при $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$.
7. Наименьшее значение равное – 1 функция принимает при
   $x \ldots, -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi, \ldots$, т.е. при $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in Z)$.

Строить графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ удобно при помощи пяти основных точек (точек пересечения с осью абсцисс и точками экстремума).

Последовательность пяти точек для функции $y = \sin x$ на промежутке $[0;2\pi]$ может быть задана так: **нуль** **точка максимума** **нуль** **точка минимума** **нуль**

Последовательность пяти точек для функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ может быть задана так: **точка максимума** **нуль** **точка минимума** **нуль** **точка максимума**





Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Обучающие задания

1. а) Постройте график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ по пяти основным точкам.

б) Сколько чисел x удовлетворяют условию $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[0; 2\pi]$?

2. а) Постройте график функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ по пяти основным точкам.

б) Сколько чисел x удовлетворяют условию $\cos x = 0{,}6$ на промежутке $[0; 2\pi]$?

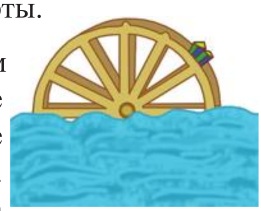
3. Постройте графики функций на заданном промежутке.

$y = \sin x,\ 0 \le x \le 4\pi$ $\qquad$ $y = \cos x,\ 0 \le x \le 4\pi$

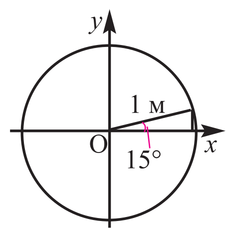
$y = \sin x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$ $\qquad$ $y = \cos x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

4. Для максимального значения функции $y = \sin x$ запишите три значения аргумента.

5. В одной системе координат постройте графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ и запишите схожие и отличительные черты.



6. Для регулировки движения диска диаметром 2 м на нём сделали метку, и проверяли расстояние между поверхностью воды и меткой. Изобразите рисунок и проведите математические вычисления. Для этого разделите единичную окружность на углы по 15° и отметьте для каждого шага расстояние от этой точки до оси x. Выполните заданный алгоритм для двух полных оборотов (720°). Необходимо ли выполнить данную проверку для ещё одного оборота? Если такой необходимости нет, то запишите их сразу, иначе вычислите их.

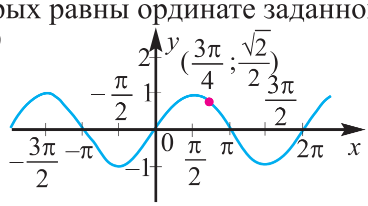


а) На каком расстоянии от уровня воды окажется метка при повороте на 15°, 375°, 735°?

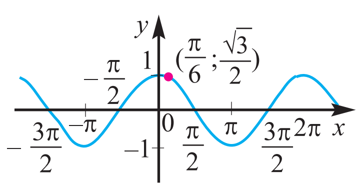
б) Отметьте значения единичной окружности на координатной плоскости и постройте график. На график какой функции он похож?

7. На графике функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ отмечена координаты одной точки. Запишите координаты ещё четырёх точек на графике, ординаты которых равны ординате заданной.

а)



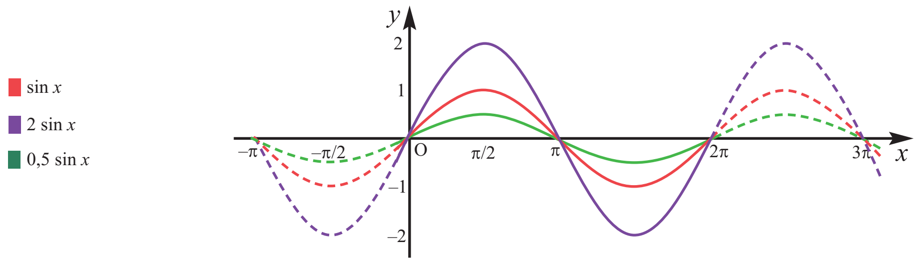
б)



Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

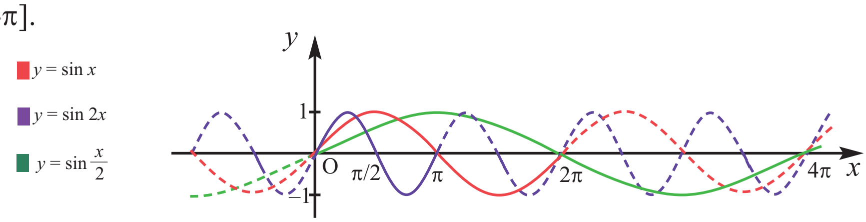
Растяжение и сжатие

Пример 1. Если на графики функции $y = \sin x$ абсциссы оставить без изменения, а ординаты увеличить в 2 раза, то получим точки, принадлежащие графику функции $y = 2 \sin x$. Это говорит о том, что график функции $y = 2 \sin x$ может быть построен из графика функции $y = \sin x$ растяжением от оси абсцисс в 2 раза. График функции $y = 0{,}5 \sin x$ можно построить сжатием к оси абсцисс графика функции $y = \sin x$ в 2 раза.



Графики функций $y = a \sin x$ и $y = a \cos x$ получаются соответственно из графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ растяжением от оси абсцисс при $|a| > 1$ и сжатием, при $|a| < 1$. При $a < 0$ график функции отображается симметрично относительно оси x.

Пример 2. График функции $y = \sin 2x$ в 2 раза "обгоняет" график функции $y = \sin x$. Если функция $y = \sin x$ принимает значения от 0 до 1 на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$, то функция $y = \sin 2x$ эти же значения принимает на интервале в этом промежутке $[0; \frac{\pi}{4}]$. Точки графика функции $y = \sin 2x$ можно получить, умножив абсциссы точек графика функции $y = \sin x$ на $\frac{1}{2}$, при этом не меняя значения ординат. График функции $y = \sin 2x$ получается из графика $y = \sin x$ сжатием в 2 раза и целый период умещается в отрезке $[0; \pi]$. График функции $y = \sin \frac{1}{2}x$ получается растяжением графика функции $y = \sin x$ в 2 раза и целый период умещается в отрезок $[0; 4\pi]$.



Графики функций $y = \sin bx$ и $y = \cos bx$ соответственно получаются из графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ сжатием к оси ординат, при $b > 1$ и растяжением при $0 < b < 1$. В случае $b < 0$ с учётом того, что синус является нечётной функцией, а косинус чётной приводит к случаям, указанным выше.

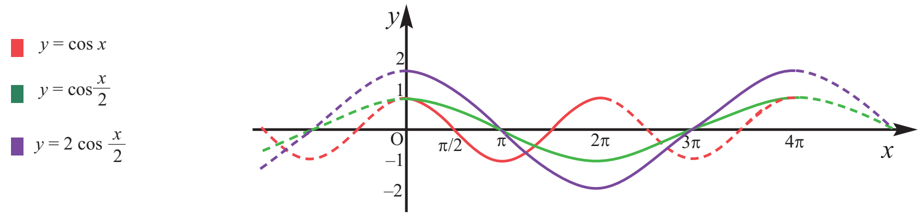
Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Графики функций $y = a \sin bx$ ($y = a \cos bx$), полученные растяжением(сжатием) вдоль координатных осей графиков $y = \sin x$ ($y = \cos x$), также являются синусоидами(косинусоидами). При увеличении значения $|a|$ амплитуда увеличивается, при уменьшении - уменьшается. При увеличении значения $|b|$ период уменьшается, при уменьшении - увеличивается.

Пример. Постройте график функции $y = 2 \cos \frac{1}{2} x$.

1. График функции $y = \cos \frac{1}{2} x$ строится растяжением в 2 раза графика функции $y = \cos x$ от оси ординат.

2. Полученный график растягивается от оси абсцисс в 2 раза.



Обучающие задания

1. График какой функции получится из графика $y = \sin x$, при:

а) растяжении от оси абсцисс в 4 раза;

б) сжатие к оси абсцисс в 3 раза;

в) растяжением от оси ординат в 2 раза?

2. Опишите словесно в результате каких преобразований из графика функции $y = \sin x$ получается график функции:

а) $y = 5 \sin x$ б) $y = \frac{2}{5} \sin x$ в) $y = \sin 3x$ г) $y = -3 \sin 4x$

3. Опишите словесно в результате каких преобразований из графика функции $y = \cos x$ получается график функции:

а) $y = 4 \cos x$ б) $y = \frac{1}{3} \cos x$ в) $y = \cos 4x$ г) $y = -4 \cos 3x$

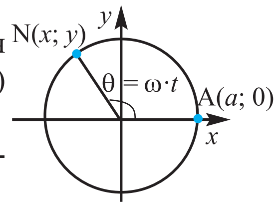
4. Постройте график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ по пяти основным точкам. Преобразуйте эти пять точек при помощи растяжения (сжатия) по координатным осям в соответствующие точки и изобразите график функции:

а) $y = 3 \sin x$ б) $y = \frac{1}{2} \sin x$ в) $y = \sin 2x$ г) $y = 4 \sin 2x$

5. Постройте график функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ по пяти основным точкам. Преобразуйте эти пять точек при помощи растяжения (сжатия) по координатным осям в соответствующие точки и изобразите график функции:

а) $y = 2 \cos x$ б) $y = \frac{1}{2} \cos x$ в) $y = \cos 2x$ г) $y = 4 \cos 2x$

Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$



Исследование. Пусть материальная точка движется по окружности радиуса a из начальной точки A(a; 0) с угловой скоростью ω.
1) Для этой точки запишите зависимость координаты от времени t.
2) Найдите наибольшее и наименьшее значение абсцисс и ординат точки.
3) Обоснуйте, что положение точки не меняется при изменении времени на $\frac{2\pi}{\omega}$.

Период и амплитуда функций $y = a\sin bx$ и $y = a\cos bx$

Теорема. Если основной период функции $y = f(x)$ равен T, то основной период функции $y = a\cdot f(bx)$ равен $\frac{T}{|b|}$ (здесь a и b числа, отличные от нуля).

Отсюда получаем, что $\frac{2\pi}{|b|}$ является **основным периодом** для функций $y = a\sin bx$ (и $y = a\cos bx$). На самом деле,

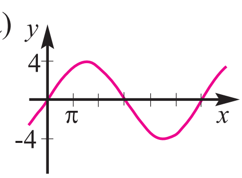
$$f(x) = a\sin bx = a\sin(bx + 2\pi) = a\sin b(x + \frac{2\pi}{b}) = f(x + \frac{2\pi}{b})$$

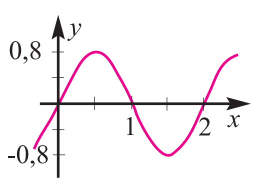
$$g(x) = a\cos bx = a\cos(bx + 2\pi) = a\cos b(x + \frac{2\pi}{b}) = g(x + \frac{2\pi}{b})$$

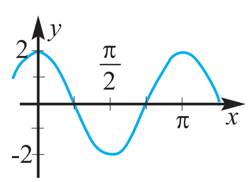
Число $|a|$ является **амплитудой**. Амплитуда равна половине разности наибольшего и наименьшего значения.

Пример. Для функции $y = -3\sin 4x$ амплитуда равна $|-3|$ или 3, основной период $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

6. Найдите амплитуду и основной период функции.

а) 

б) 

в) 

г) $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$ д) $y = \sin 2x$ е) $y = 3\cos\frac{1}{4}x$
ж) $y = 5\cos\frac{1}{2}x$ з) $y = 2\sin\frac{1}{2}\pi x$ и) $y = \frac{1}{3}\sin 4\pi x$

7. 1) Для заданной амплитуды и периода, напишите формулу функции $y = a\sin bx$ (здесь $a > 0$, $b > 0$).

а) Амплитуда: $\frac{1}{2}$
Период: 3π

б) Амплитуда: 4
Период: π

в) Амплитуда: 2
Период: 2π

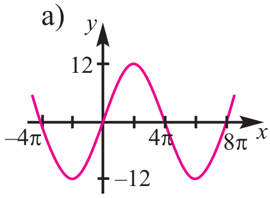
2) Для заданной амплитуды и периода, напишите формулу функции $y = a\cos bx$ (здесь $a > 0$, $b > 0$).

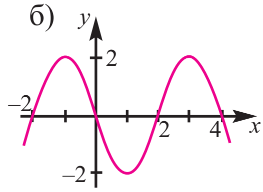
а) Амплитуда : $\frac{1}{3}$
   Период: 5π

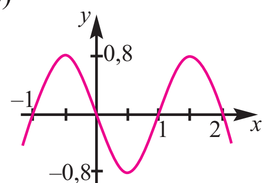
б) Амплитуда: 2
   Период: π

в) Амплитуда: 5
   Период: $\frac{\pi}{2}$

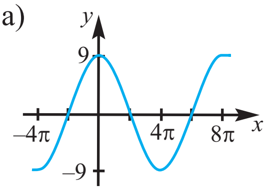
8. Запишите формулу функции вида $y = a\sin bx$ соответствующую графику.

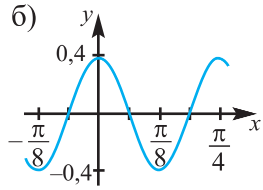
а) 

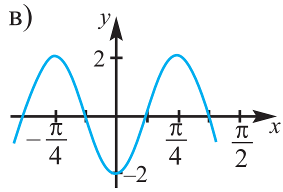
б) 

в) 

9. Запишите формулу функции вида $y = a\cos bx$ соответствующую графику.

а) 

б) 

в) 

10. Определите основной период функций $f(x)$ и $g(x)$. Найдите общий период функций.

а) $f(x) = 2\sin\frac{2x}{3}$, $g(x) = 3\cos\frac{1}{2}x$

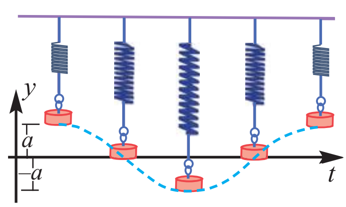
б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $g(x) = 4\cos 3x$

в) $f(x) = 3\sin\frac{1}{3}x$, $g(x) = \frac{2}{3}\cos\frac{2}{5}x$

Указание: Если T_1 и T_2 периоды заданных функций, то для нахождения общего периода T надо для чисел m и n найти наименьшее натуральное число удовлетворяющее равенству $T = mT_1 = nT_2$.

Прикладные задания: моделирование функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

11. **Физика.** На рисунке показано движение тела, подвешенного на пружине. Тело, в состоянии покоя, находится в равновесии. Состояние покоя примем за начало движения. ***a*** показывает **изменение положения** тела при перемещении. Количество циклов за единицу времени называется **частотой (ω)**, время, за которое совершается полный цикл колебания называется **периодом** (T).



Частота и период взаимно обратные величины: $\omega = \frac{1}{T}$

Движение тела, подвешенного на пружине можно смоделировать функцией $y = a\cos kt$. Здесь y показывает положение равновесия пружины по вертикали (см), a - начальное изменение положения, k - коэффициент эластичности пружины, t - время (сек.). Если $a = 0{,}5$ см и $k = 5\pi$, то найдите амплитуду, период и частоту колебания.

12. **Движение карусели.** Допустим вы находитесь в кабинке карусели. Расстояние до земли периодически изменяется в зависимости от времени. Примем ось карусели за начало движения. Диаметр карусели равен 20 м и за 3 минуты карусель делает 4 оборота.

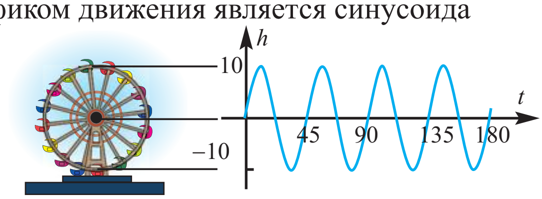
а) Изобразите график движения карусели, приняв ось x за время, а ось y за расстояние.

б) Найдите основной период и запишите формулу соответствующую движению карусели.

Решение: частота,т.е. количество оборотов за минуту равна $\frac{4}{3}$. Так как период является величиной, обратной для частоты, то он равен $\frac{3}{4}$ минуты, то есть 45 секунд.

Карусель может откланяться от начального положения на 20 : 2 = 10 м вверх (10) и вниз (-10). Графиком движения является синусоида с периодом 45 секунд.

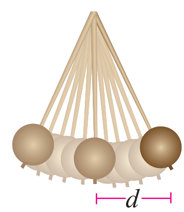
Запишем формулу функции в виде $y = a \sin bx$.



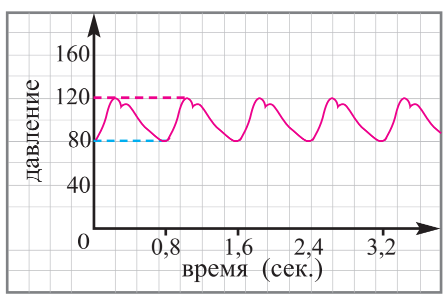
$$T = \frac{2\pi}{b}, \qquad \frac{2\pi}{b} = 45, \qquad b = \frac{2\pi}{45}.$$ Амплитуда: 10

Тогда формула для функции будет $h = 10 \sin \frac{2\pi}{45} t$.

13. Движение маятника может быть смоделировано по формуле $d = 4 \cos 8\pi t$. Здесь, d показывает отклонение от начального положения(в см), t - время (в сек.). Найдите на какое наибольшее расстояние можем отклоняться маятник? Найдите период и частоту.



14. При каждом ударе человеческого сердца давление крови изменяется между наибольшим и наименьшим значением. Нормой артериального давления принято считать 120 мм ртутного столба на нижней границе(систола) и 80 мм ртутного столба на верхней границе (диастола).



На рисунке изображён график артериального давления человека.

1) По графику найдите период (время, за которое происходит один удар) и амплитуду.

2) Найдите количество ударов за минуту.

Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Сдвиг по горизонтали - фаза.

В функциях $y = a \sin b(x - c)$, $y = a \cos b(x - c)$ член c показывает смещение графика по горизонтали, которое называется **фазой**.

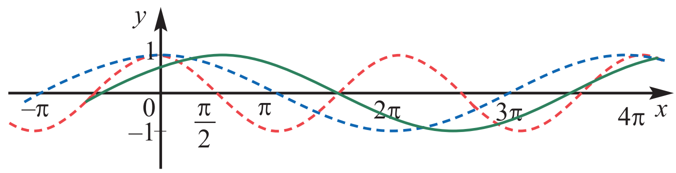
Пример. Постройте график функции $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$.

Построим график функции $y = \cos\frac{1}{2}x$ растяжением графика функции $y = \cos x$ в 2 раза от оси ординат. График функции $y = \cos\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$ можно получить смещением графика функции $y = \cos\frac{1}{2}x$ вправо на $\frac{\pi}{2}$ единиц, т.е. получаем график функции $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$.

$y = \cos x$

$y = \cos\frac{1}{2}x$

$y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$



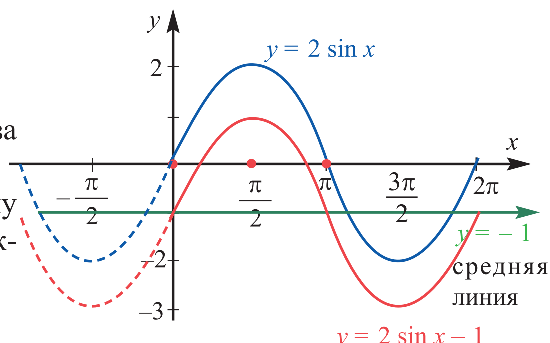
Смещение по вертикали.

В функциях $y = a \sin bx + d$ и $y = a \cos bx + d$ член d показывает смещение по вертикали: если $d > 0$ график функции сдвигается вверх, $d < 0$ график сдвигается вниз.

Пример. Постройте график функции $y = 2 \sin x - 1$.

Решение: ниже показаны этапы преобразования графика функции $y = \sin x$ в график функции $y = 2 \sin x - 1$ по шагам.

1. Увеличиваем амплитуду в 2 раза получаем график $y = 2 \sin x$.
2. Сдвигаем график вниз на одну единицу и получаем график функции $y = 2 \sin x - 1$.



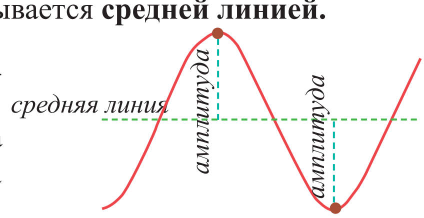
Множество значений функции $-3 \le y \le 1$.

График функции $y=2 \sin x-1$ изменяется относительно прямой $y = -1$ на 2 единицы вверх и вниз. Эта линия называется **средней линией**.

$$\text{средняя линия} = \frac{\text{максимум} + \text{минимум}}{2}$$

максимум = средняя линия + амплитуда

минимум = средняя линия − амплитуда



Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

$$y = a \sin b(x - c) + d$$

влияет на амплитуду (a)

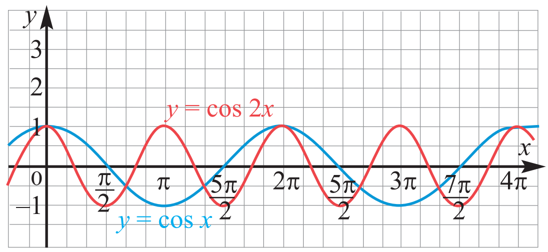
влияет на основной период (b)

влияет на на сдвиг по горизонтали (c)

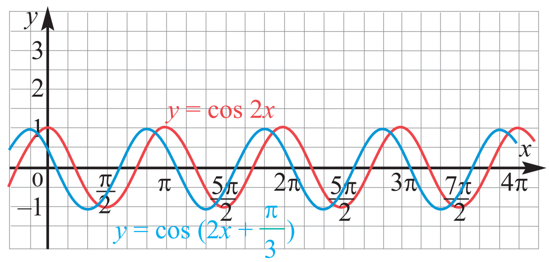
влияет на сдвиг по вертикали (d)

Пример. Постройте график функции $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$.

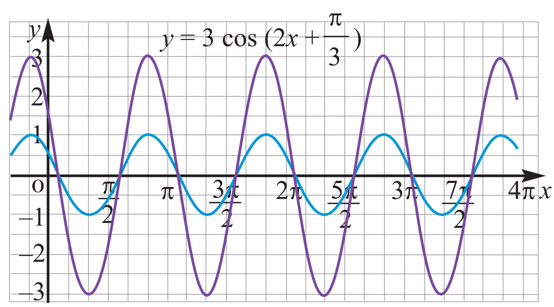
1) График функции $y = \cos 2x$ получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием к оси ординат в 2 раза.



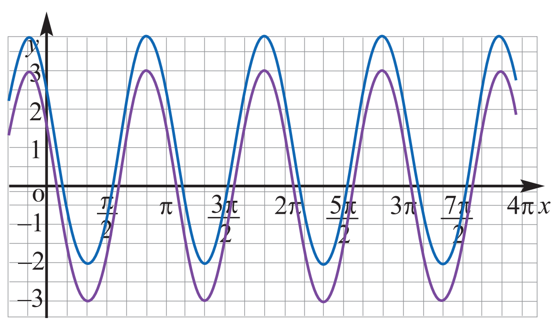
2) Смещая график функции $y = \cos 2x$ влево на $\frac{\pi}{6}$ единицы получаем график функции $y = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$, т.е. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.



3) Растянем график функции $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ вдоль оси ординат в 3 раза и получим график функции $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.



4) Сместим график функции $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ по вертикали на 1 единицу вверх и получим график функции $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$



Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

15. Опишите словесно этапы преобразования графика функции $y = \sin x$ для следующих функций.

а) $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ б) $y = 3\sin\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$ в) $y = 2\sin(x + 60^\circ) - 4$

16. Опишите словесно этапы преобразования графика функции $y = \cos x$ для следующих функций.

а) $y = \cos(x - \frac{5\pi}{6})$ б) $y = 3\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ в) $y = 4\cos(x - 15^\circ) + 3$

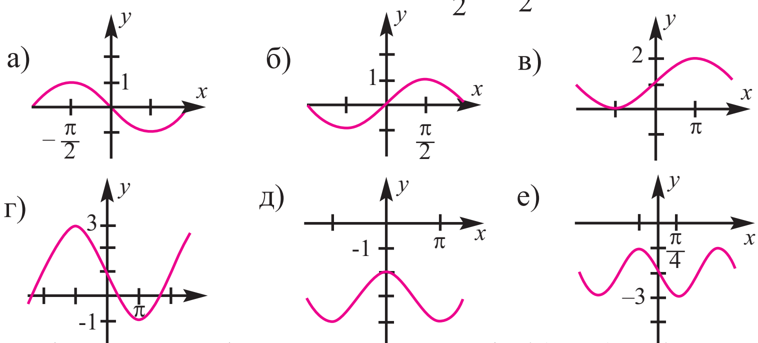
17. Найдите максимум (минимум) и множество значений функций.

а) $y = 3\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 5$ б) $y = \frac{1}{2}\sin 3x - 3$ в) $y = \frac{1}{3}\cos(x + 50^\circ) + \frac{1}{6}$

18. Установите соответствие между графиком и функцией.

1) $y = -2 + \sin(2x + \pi)$ 3) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 5) $y = -\sin(x + \pi)$

2) $y = -3 + \cos x$ 4) $y = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ 6) $y = 1 + \sin\frac{1}{2}x$



19. Запишите формулу для функции вида $y = a\sin b(x - c) + d$.

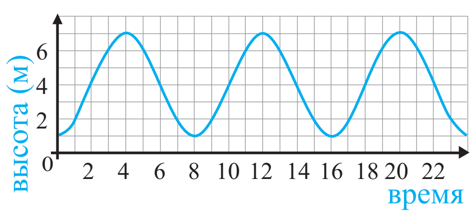
а) амплитуда 4, период π, сдвиг по фазе $\frac{\pi}{4}$ единиц вправо, сдвиг по вертикали 6 единиц вниз.

б) амплитуда 0,5, период 3π, сдвиг по фазе $\frac{\pi}{3}$ единиц влево, сдвиг по вертикали 2 единицы вверх.

20. Схематично изобразите графики функций.

а) $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{4})$ б) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2$ в) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 3$

21. **Наргиз на карусели.** График показывает зависимость между высотой(м), на которой находится Наргиз при катании на карусели, и временем (сек.). Запишите:



1) период функции и что он выражает;

2) множество значений функции;

3) в какой момент времени, между 24 - 30 секундами, Наргиз окажется на высоте 4 м от земли?

Построение синусоиды по пяти основным точкам

Преобразование при помощи движения и подобия сохраняет “форму” кривой. Поэтому не только график синуса, но в тоже время и кривая, полученная растяжением (сжатием) и последовательными смещениями, называется синусоидой. Свойства функций, заданных в виде $y = a\sin bx$ и $y = a\cos bx$ аналогичны свойствам функций синуса и косинуса, что помогает при их исследовании. В начале необходимо найти их период и точки, в которых значения функции равны 0 или $\pm a$.

График функции $y = a\sin bx$ и $y = a\cos bx$ можно легко построить по значениям пяти важных точек в промежутке $[0;\frac{2\pi}{|b|}]$ по следующему алгоритму.

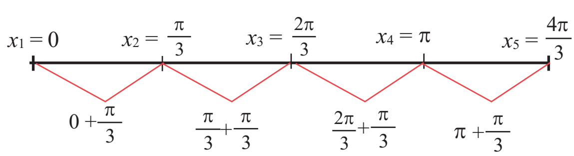
1. Определяем амплитуду графика.
2. Определяем основной период графика $\frac{2\pi}{|b|} = T$
3. Разбиваем отрезок $[0; T]$ на 4 равных части: $0, \frac{T}{4}; \frac{T}{2}; \frac{3T}{4}; T$.
4. Пять важных точек - **точки пересечения с осью x, точки максимума и минимума**. Для вышеупомянутых точек x находятся значения y.
5. Координаты 5-ти точек $(x; y)$ отмечаются на координатной плоскости.
6. Эти точки соединяются. Полученная синусоидальная кривая является графиком для одного периода. Повторяя построенный график, можно получить график заданной функции на любом отрезке.

Пример 1. Постройте график функции $y = \cos\frac{3x}{2}$ по пяти основным точками.

Решение: амплитуда: $a = 1$

Основной период: $T = \frac{2\pi}{|b|}$; $b = \frac{3}{2}$ $T = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$

Отрезок, соответствующий одному периоду по оси x разделим на четыре равных части. Для целого периода $\frac{1}{4}$ равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Начиная от точки $x_1 = 0$, через каждые $\frac{\pi}{3}$ отметим справа последовательно точки $x_2 = \frac{\pi}{3}$ через $\frac{1}{4}$ периода, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$ через $\frac{1}{2}$ периода, $x_4 = \pi$ через $\frac{3}{4}$ периода и, наконец, $x_5 = \frac{4\pi}{3}$ через целый период.



Построение синусоиды по пяти основным точкам

Вычислим значения функции $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ в указанных точках.

1. $x = 0 \quad y = 1 \qquad (0;1)$ **точка максимума**

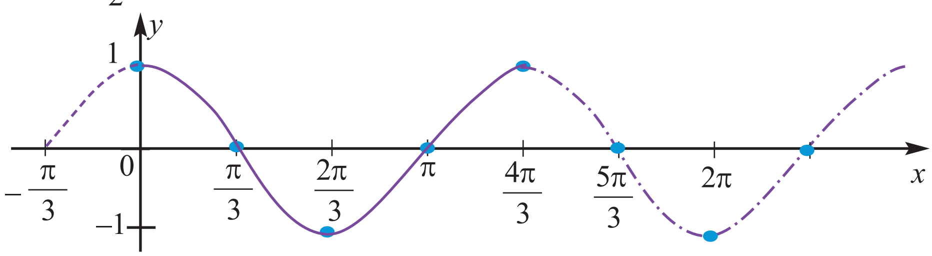
2. $x = \dfrac{\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \quad \left(\dfrac{\pi}{3};0\right)$ **точка пересечения с осью абсцисс**

3. $x = \dfrac{2\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \cos\pi = -1 \quad \left(\dfrac{2\pi}{3};-1\right)$ **точка минимума**

4. $x = \pi \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\pi = 0 \qquad (\pi\,;\,0)$ **точка пересечения с осью абсцисс**

5. $x = \dfrac{4\pi}{3} \quad y = \cos\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4\pi}{3} = \cos 2\pi = 1 \quad \left(\dfrac{4\pi}{3};\,1\right)$ **точка максимума**

Отметим координаты этих точек на координатной плоскости, и соединим сплошной линией. Данный график является графиком функции $y=\cos\dfrac{3x}{2}$ на отрезке $[0;\ \dfrac{4}{3}]$. Если параллельно перенести данный график вдоль оси абсцисс на $\dfrac{4}{3}\pi n$ $(n \in Z)$, то получим график функции $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ на всей числовой оси (показано пунктиром).



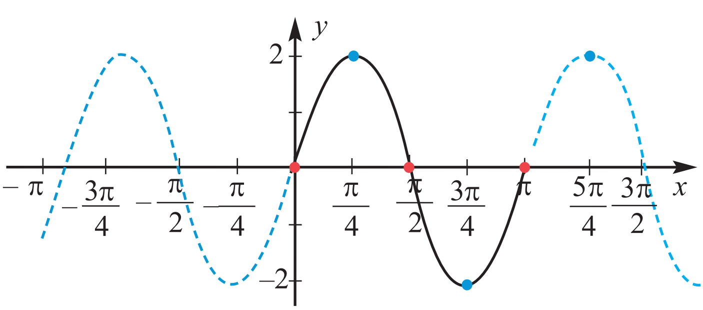
Пример 2. Постройте график функции $y = 2\sin 2x$.

Решение. Амплитуда: $a = 2$. Значения y меняются от -2 до 2.

Основной период: $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$, $b = 2$; $T = \pi$.

Разделим отрезок $[0;\ \pi]$ (один период) на 4 равные части. Найдём значения x и соответствующие значения функции. Построим график.

	x	$y = 2\sin 2x$
пересечение	0	0
максимум	$\frac{\pi}{4}$	2
пересечение	$\frac{\pi}{2}$	0
минимум	$\frac{3\pi}{4}$	-2
пересечение	π	0

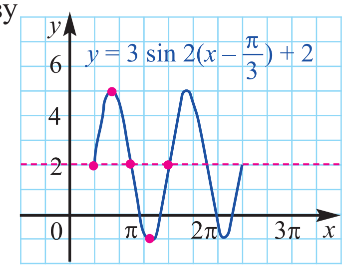


Построение синусоиды по пяти основным точкам

Пример 3. Для нахождения начальной и конечной точек периода функции $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ надо решить неравенство $0 \le 2(x - \frac{\pi}{3}) \le 2\pi$

$0 \le x - \frac{\pi}{3} \le \pi \qquad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

Здесь начальная точка $\frac{\pi}{3}$ показывает и фазу тоже.



Разделив отрезок $[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$ на 4 равные части необходимо определить пять основных точек. Значения x в этих пяти точках будут $\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{12}; \frac{4\pi}{3}$.

В этих точках x для функции $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ получаем точки $(\frac{\pi}{3}; 2)$ $(\frac{7\pi}{12}; 5)$ $(\frac{5\pi}{6}; 2)$ $(\frac{13\pi}{12}; -1)$ $(\frac{4\pi}{3}; 2)$ и строим график.

Для функции $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 2$ имеем:
амплитуда: $a = 2$, период: π, сдвиг по фазе: $\frac{\pi}{3}$, средняя линия: $d = 2$, максимальное значение: $d + a = 2 + 3 = 5$, минимальное значение: $d - a = 2 - 3 = -1$, область определения, множество всех действительных чисел($x \in R$), множество значений $-1 \le y \le 5$

Обучающие задания

1. По таблице значений, как показано на примере, постройте графики функций $f(x)$ и $g(x)$

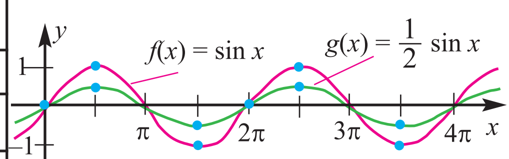
а) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$

б) $f(x) = \sin x$; $g(x) = -3\sin x$

в) $f(x) = \cos x$; $g(x) = 4\cos x$

г) $f(x) = \cos x$; $g(x) = -\frac{1}{2}\cos x$

Функции	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$
пересечение	(0; 0)	(0; 0)
максимум	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})$
пересечение	$(\pi; 0)$	$(\pi; 0)$
минимум	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{3\pi}{2}; -\frac{1}{2})$
пересечение	$(2\pi; 0)$	$(2\pi; 0)$



Построение синусоиды по пяти основным точкам

2. Для функции $y = \sin bx$ найдите значения b, если основной период функции Т равен : а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 3 . Отрезок $[0; T]$, длина которого равна периоду, разделите на 4 равных интервала для данных значений x, вычислите соответствующие значения y.

3. а) Для функции $y = \sin x$, запишите координаты 5-ти основных точек, расположенных в интервале $[0; 2\pi]$

б) По 5-ти основным точкам на интервале $[0; \pi]$ постройте график функции $y = \sin 2x$ и покажите промежутки возрастания и убывания.

4. Постройте график функции, определив на отрезке, длиной в один период, пять основных точек.

а) $y = \sin \frac{1}{4}x$ б) $y = 5 \sin 2\pi x$ в) $y = 3 \cos 4x$ г) $y = \frac{1}{4} \sin 2x$

5. Запишите период заданной функции в градусах и в радианах. Постройте график функции на одном периоде по 5-ти основным точкам.

а) $y = \sin 4x$ б) $y = \sin\frac{2}{3}x$ в) $y = \cos\frac{1}{2}x$ г) $y = \cos 2x$

6. В одной системе координат, постройте графики функций $f(x)$ и $g(x)$ по 5-ти основным точкам.

1) $f(x) = -2 \sin x$, $g(x) = 4 \sin x$
2) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin \frac{x}{3}$
3) $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = -\cos 4x$

7. 1) Зная амплитуду и период, запишите формулу функции в виде $y = a \sin bx$ и постройте график полученной функции по 5-ти основным точкам.

а) амплитуда = 2,5; период = 6π б) амплитуда = 4; период = $\frac{\pi}{2}$

2) Зная амплитуду и период, запишите формулу функции в виде $y = a \cos bx$ и постройте график полученной функции по 5-ти основным точкам.

а) амплитуда = 5; период = 2π б) амплитуда = $\frac{3}{2}$; период = π

8. **Вопрос открытого типа.** Запишите одну функцию для синуса и одну для косинуса, амплитуда которых равна 1,5, а период равен $\frac{\pi}{2}$.

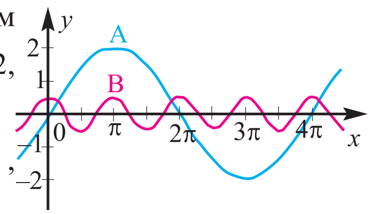
9. Определите период и амплитуду функции. Постройте график функции, определив на отрезке, длиной в один период, пять основных точек.

а) $y = 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) - 2$ б) $y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 3$

Построение синусоиды по пяти основным точкам

10. По графику установите основной период и амплитуду функции. Запишите функцию в виде $y = a \sin bx$ и $y = a \cos bx$.

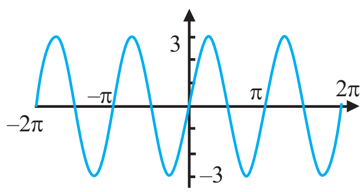
а) **Пример. Для графика A:** сначала определим амплитуду. Наибольшее значение равно 2, наименьшее -2 . Значит $a = \dfrac{2-(-2)}{2} = 2.$
Так как период равен 4π, зная , что $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$, имеем $4\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$; $b = \dfrac{1}{2}$.



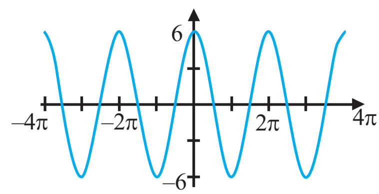
Запишем формулу функции для графика, приняв амплитуду $a = 2$ и период $b = \dfrac{1}{2}$: $y = 2 \sin \dfrac{1}{2} x$.

Для графика B: по аналогичному правилу, амплитуда равна $a = 0{,}5$, основной период π и из равенства $\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$ находим, что $b = 2$.
График соответствует графику косинуса. Тогда получаем: $y = 0{,}5 \cos 2x$.

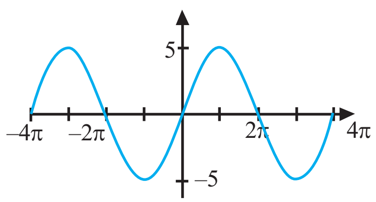
б)



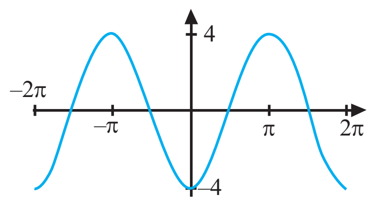
в)



г)



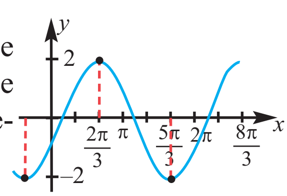
д)



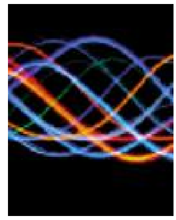
11. Постройте графики функций.

1) $y = 2 + \sin x$ 2) $y = 5 - \cos x$ 3) $y = -2 + \cos x$
4) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 5) $y = -\sin(x + \pi)$ 6) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
7) $y = 5 - \cos(x - \frac{\pi}{4})$ 8) $y = -2 - \sin(x - \pi)$ 9) $y = 3 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

12. Задайте формулу функции на рисунке в виде $y = a \cos(bx + c)$. Запишите пять точек, которые позволят продолжить график ещё на одном периоде справа.



Тригонометрические функции и периодические события



В природе и в жизни мы достаточно часто сталкиваемся с периодическими процессами - вращение Земли, изменение времен года, дыхание, сердечный ритм сердца человека и т.д.. Также периодическими являются очень многие физические явления. Например, при исследовании колебания электрических и оптических волн используют периодические функции. Самые простые колебания называются гармоническими колебаниями и записываются в виде $y = a\sin(bx + c)$ или $y = a\cos(bx + c)$.

Пример 1. **Биология.** В биологии прогнозирование численности зверей и птиц моделируют с помощью периодических функций. Учёные исследуют численность сов и мышей в одном регионе. В результате моделируется функция численности особей (по месяцам).

Для сов эта функция записывается так:

$B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$,

для мышей так:

$S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

По информации, представленной на графике, можно сделать выводы о численности сов и мышей, которые являются пищей для сов.

а) Постройте графики каждой функции.

б) Какой вывод можно сделать об изменении численности сов и мышей?

в) Исследуйте отношение численности сов и мышей в зависимости от времени.

Решение: а) $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

Для сов имеем: максимум функции 1100, минимум 900.

Амплитуда: 100. Сдвиг по вертикали: $d = 1000$ (начальное значение).
Средняя линия = 1000. Период: $\frac{2\pi}{|b|}$, $b = \frac{\pi}{12}$, тогда $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$

Т.е., основной период функции 24 месяца.

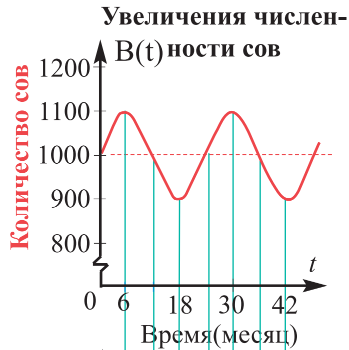
$S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

Для мышей имеем: максимум функции 24 000, минимум 16 000.

Амплитуда : 4000. Сдвиг по вертикали: $d = 20000$ (начальное значение)
Средняя линия = 20000. Период: $\frac{2\pi}{|b|}$, $b = \frac{\pi}{12}$, тогда $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$.

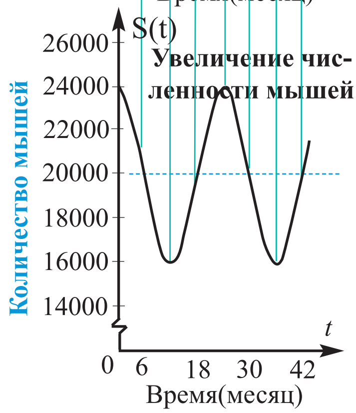
То есть, основной период данной функции, также 24 месяца.

б) Если графики построены в одном масштабе, то их можно сравнить. Так как мыши являются пищей для сов, то при увеличении сов, численность мышей уменьшается и стремиться к минимальному значению. При уменьшении сов, численность мышей увеличивается и достигает наибольшего значения в то время, когда количество сов достигает минимума.



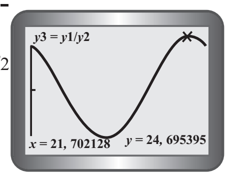
в) В таблице показано отношение количества сов и мышей за каждые 6 месяцев.

Время	Совы	Мыши	Отношение
0	1000	24000	0,041
6	1100	20000	0,055
12	1000	16000	0,062
18	900	20000	0,045
24	1000	24000	0,041



Это отношение должно изменяться в определённой закономерности. Для того, чтобы увидеть эту закономерность, построим функцию соответствующую отношению при помощи граф калькулятора.

Функцию $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ введём в граф калькулятор как y_1, а функцию $S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ как y_2 и построим график функции $y = \frac{y_1}{y_2}$. Увидим, что в этом случае отношение двух периодических функций является периодической функцией.



Прикладные задания

1. Прогноз погоды. Информация в таблице показывают среднемесячную температуру. Постройте график, отмечая на горизонтальной оси месяца (январь $t = 1$, февраль $t = 2$ и т.д.), а на вертикальной - температуру. Смоделируйте изменение температуры с помощью тригонометрической функции.

Месяца	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Средняя температура (°C)	–14,8	–12,7	–6,8	1,2	9,2	15,1	17,2	15,1	9,1	1,3	–6,7	–12,6

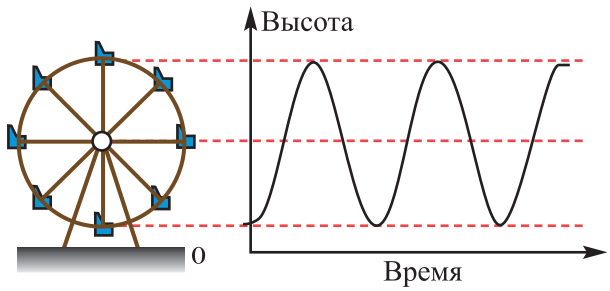
Тригонометрические функции и периодические события

2. **Здоровье.** Функция $P = 100 - 20\cos\frac{5\pi t}{2}$ показывает нормальное артериальное давление человека в состоянии покоя t (сек.) время за которое можно определить давление.

а) Определите период функции.

б) Найдите количество ударов сердца человека за 1 минуту.

3. Карусель, ось которой расположена на расстоянии 10 м от земли совершает полный оборот за 60 секунд. Пассажиры садятся на карусель в кабинку на высоте 2м. График на рисунке показывает движение карусели за 150 секунд.



а) Запишите функцию, выражающую высоту любой кабины в каждый момент времени.

б) Когда карусель начала двигаться, Гюнель, находилась в самой нижней кабинке. Определите на какой высоте будет находится Гюнель через 2,5 минуты?.

4. **Биология.** $D(t)$ и $Ç(t)$ математические модели, которые соответствуют количеству зайцев и шакалов:

$D(t) = 30000 + 15000\cos\frac{\pi t}{12}$

$Ç(t) = 4000 + 2000\sin\frac{\pi t}{12}$. Постройте графики обеих функций в одной системе координат и представьте условия, диаграммы на графике.

5. Движение велосипеда по прямой было зафиксировано ночью с помощью видеонаблюдения. В таблице представлена информация о лампочке на колесе велосипеда - высота в разные моменты времени.

Время (t сек.)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Высота (H см)	27	45	54	45	27	18	27	45	54

а) Постройте график функции для одного периода.

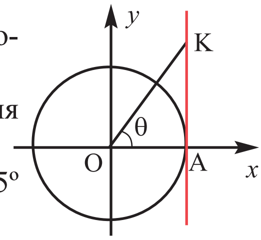
б) Смоделируйте в виде тригонометрической функции зависимость H от t.

в) Найдите диаметр колеса велосипеда.

г) Найдите скорость велосипеда.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Исследование. Изменение тангенса угла. 1) На листе в клетку изобразите координатную плоскость и единичную окружность, с центром в начале координат. К окружности проведите касательную в точке (1;0).



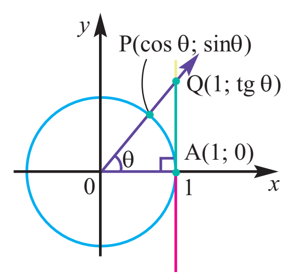
2) Обозначим через K точку пересечения конечной стороны угла поворота θ с касательной.
Из ΔOAK $\operatorname{tg}\theta = \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{1} = AK$. Значение tg θ, для острого угла поворота θ равно длине отрезка AK.
3) В какой точке пересекает конечная сторона угла 45° касательную?
4) При помощи транспортира изобразите ещё несколько разных углов и и найдите ординаты точек пересечения с касательной.
5) Как изменяется ордината точки K, при стремлении угла θ к 90°? Пересекается ли касательная с конечной стороной угла поворота при θ = 90°?
6) Известно, что для периодической функции с периодом T достаточно изучить функцию на одном интервале длиной T.
На каком интервале для tg θ целесообразно изучение функции?
7) tg θ не определён для θ = 90° и θ = –90° . В интервале (–90°; 90°) функция определена.
Заполните таблицу и постройте график функции тангенса.

Измерения угла	–70°	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°	70°
ордината точки на касательной									

8) Постройте график функции $y = \operatorname{tg}\theta$ при помощи граф калькулятора.

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Значения тангенса для угла θ равно угловому коэффициенту прямой, проходящей через начало координат и точки с координатами (cos θ; sin θ), расположенной на единичной окружности .

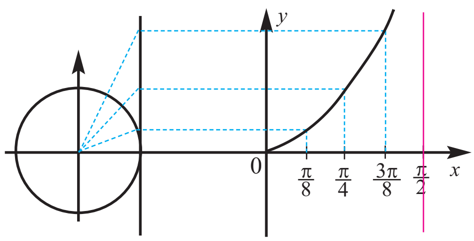


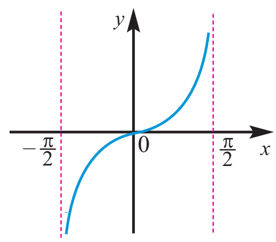
Как видно по рисунку, длина отрезка касательной AQ равна ординате точки Q. Координаты точки Q равны (1; tg θ). Прямая AQ называется прямой тангенсов.

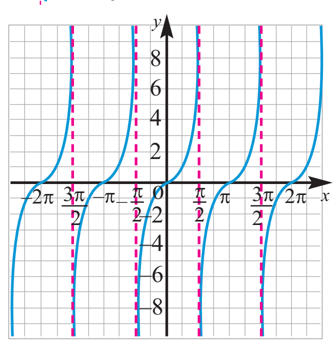
При tg 0 = 0 график функции $y = \operatorname{tg} x$ проходит через начало координат. Если x, оставаясь меньше $\frac{\pi}{2}$, стремит к нему, то значения $\operatorname{tg} x$ увеличиваются и приближаются к $+\infty$. Прямые $x = \frac{\pi}{2}$, так же как и $x = \frac{\pi}{2}\cdot(2k + 1)$ $(k \in Z)$ являются вертикальными асимптотами графика $y = \operatorname{tg} x$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Разобъём I четверть единичной окружности и отрезок $[0; \frac{\pi}{2})$ на 4 равные части. На линии тангенсов построим отрезки, равные значению соответствующих углов. На оси Ox отметим точки, соответствующие данным углам, и восстановим к каждой из них перпендикуляр. Через эти точки, параллельно оси Ox, проведём параллельные прямые. Полученную последовательность точек соединим сплошной линией.Получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ в промежутке $[0; \frac{\pi}{2})$. Учитывая, что $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, преобразуем полученный график симметрично относительно начала координат, получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$







Зная, что период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π, построенный график продолжим на π вправо и влево. Получим график, который называется тангенсоида.

Основные свойства

- График функции не является непрерывным, прерывается при x равных и кратных $\frac{\pi}{2}$ в нечетное количество раз
- Функция не имеет максимумов и минимумов.
- Область значений функции множество всех действительных чисел.
- Основной период функции равен π.
- График функции пересекает ось x в точках $x = \pi n$, $(n \in Z)$
- Функция не определена в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in Z)$. Пунктирные линии, проходящие через эти точки являются вертикальными асимптотами.
- Область определения функции $y = \operatorname{tg} x \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $(n \in Z)$
- Функция возрастает между двумя соседними асимптотами.
- Функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

Обучающие задания

1. Вычислите, используя свойства функции тангенса.

а) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$ б) $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4})$ в) $\operatorname{tg}(-\frac{11\pi}{3})$

2. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

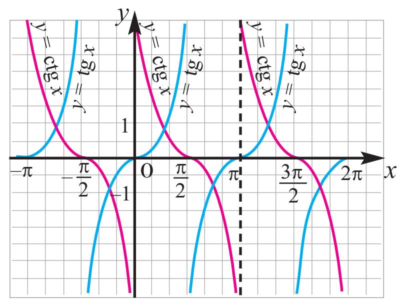
Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$.

1) Переместим график функции $y = \operatorname{tg} x$ влево вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$.

2) Отобразим полученную кривую симметрично относительно оси абсцисс.

При $x = \pi n$ значения тангенса равны нулю, функция котангенса при данных значениях x не определена:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

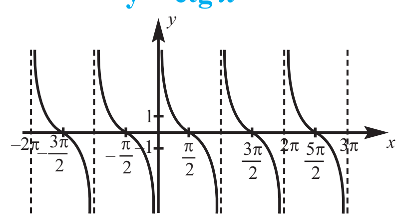


Как видно по графику, точки пересечения с осью x (нули) и асимптоты функций тангенса и котангенса меняются местами.

Основные свойства

- Основной период π.
- Область определения множество всех действительных чисел отличных от $n\pi$ (n любое целое число).
- Область значений-все действительные числа.
- Функция убывает между двумя соседними асимптотами.
- Функция нечётная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

y = ctg *x*



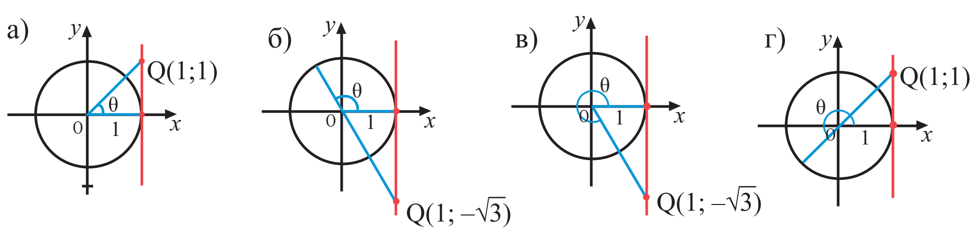
Обучающие задания

3. Ответьте на следующие вопросы:

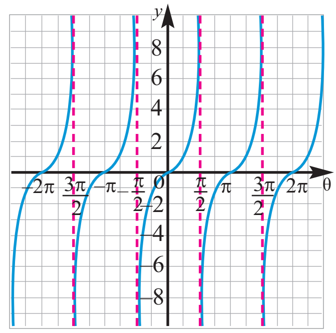
а) Функция тангенса не определена для $\alpha = 90°$ и $\alpha = -90°$. Как ведут себя графики этих функций?

б) Сколько радиан и сколько градусов составляет период функции тангенс?

4. Найдите $\operatorname{tg} \theta$ и градусную меру угла θ.



Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$



5. По графику функции $\operatorname{tg}\theta$ найдите следующие значения.

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ б) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$ в) $\operatorname{tg}(-\frac{7\pi}{4})$

г) $\operatorname{tg} 0$ д) $\operatorname{tg}\pi$ е) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$

6. Постройте графики функций на заданном промежутке.

а) $y = \operatorname{tg} x \quad -90° < x < 90°$ в) $y = \operatorname{tg} x \quad -90° < x < 270°$

б $y = \operatorname{tg} x \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ г) $y = \operatorname{tg} x \quad -\pi \le x \le \pi$

7. а) Зная , что если $\alpha = \frac{11\pi}{24}$, то $\operatorname{tg}\alpha \approx 7{,}6$ и используя основной период функции тангенса, запишите ещё три значения для угла α.

б) Зная , что если $\alpha = 1{,}25$, то $\operatorname{tg}\alpha \approx 3$ и используя основной период функции тангенса, запишите ещё три значения для угла α.

в) Запишите два значения x из промежутка $-\pi \le x \le \pi$, в которых функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена.

8. При приближении значений x к 90° часть графика функции $y = \operatorname{tg} x$ словно принимает форму вертикальной прямой. Вычислите значения тангенсов углов в таблице при помощи калькулятора. Как изменяются значения тангенсов для угла θ при приближении к 90° и при удалении от угла 90°?

θ	$\operatorname{tg}\theta$
89,5°	
89,9°	
89,999°	
89,999999°	

θ	$\operatorname{tg}\theta$
90,5°	
90,01°	
90,0001°	
90,000001°	

9. Для каждой функции на промежутке $-2\pi \le x \le 2\pi$ найдите: а) нули; б) вертикальные асимптоты.

1) $y = \operatorname{tg} x$ 2) $y = \operatorname{ctg} x$

10. Найдите три таких значения x на промежутке $-2\pi \le x \le 2\pi$, при которых не определена функция: а) котангенса; б) тангенса.

11. Постройте графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и по графику объясните чётными или нечётными являются данные функции. Сделайте соответствующую математическую запись.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

График функции $y = a \operatorname{tg} bx$

Для построения графика функции $y = a \operatorname{tg} bx$, где a и b отличные от нуля различные числа, нужно определить следующее:

1. Период: $\dfrac{\pi}{|b|}$ Например, период функции $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ равен: $\dfrac{\pi}{3}$
2. Вертикальные асимптоты: $x = \dfrac{\pi}{2|b|} \cdot (2n + 1),\ n \in Z.$

Асимптотами функции $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ являются прямые:

$x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2 \cdot 3} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$

3. Определяется средняя точка отрезка между точкой пересечения оси x с асимптотой. Соответствующие значения y равны или a, или $-a$.

Пример 1. Построим график функции $y = \dfrac{2}{3} \operatorname{tg} 2x.$

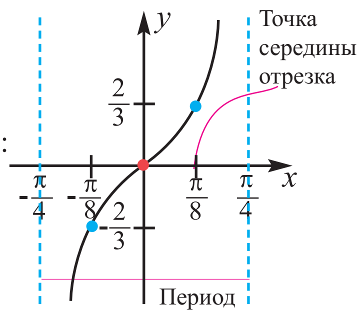
Решение. период: $T = \dfrac{\pi}{b} = \dfrac{\pi}{2}$

Точка пересечения с осью абсцисс: (0; 0)

Самая близкая асимптота от начала координат:

$x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, то есть $x = \dfrac{\pi}{4}$

и $x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, то есть $x = -\dfrac{\pi}{4}$



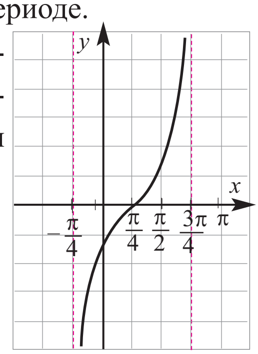
Средние точки: $x = (0 + \dfrac{\pi}{4}) : 2 = \dfrac{\pi}{8}$, $x = (-\dfrac{\pi}{4} + 0) : 2 = -\dfrac{\pi}{8}$

и на графике им соответствуют точки $(\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{2}{3}),\ (-\dfrac{\pi}{8}; -\dfrac{2}{3}).$

Пример 2.

Постройте график функции $y = \operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{4})$ на одном периоде.

Решение: Для функции tg (x) значения x на одном периоде меняется в интервале $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Соответствующий промежуток для функции $\operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{4})$ для одного периода можно найти решив неравенство:



$$-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Асимптоты проходят через точки $-\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$. Учитывая точки (0; –1) и $(\dfrac{\pi}{2};1)$, построим схематично график функции.

Графики функций $y = \text{tg}\, x$ и $y = \text{ctg}\, x$

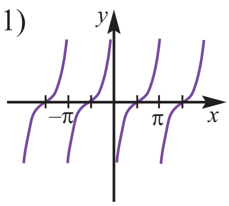
12. Найдите асимптоты, нули и среднюю точку функции.

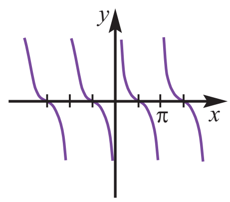
а) $y = 3\,\text{tg}\, x$ б) $y = 2\text{tg}\dfrac{1}{3}x$ в) $y = \text{tg}\, 2\pi\, x$

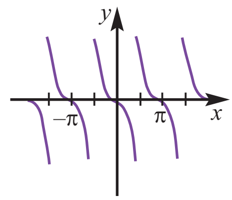
13. Постройте график функции.

$y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $y = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ $y = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

14. Установите соответствие между графиком и функцией.

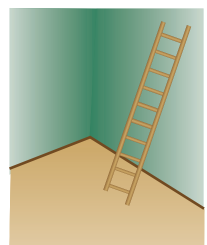
1)


2)


3)


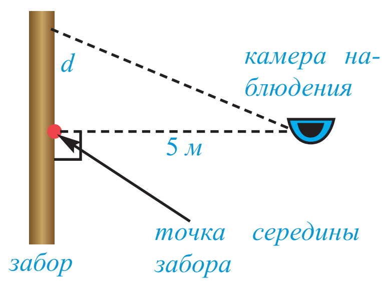
а) $y = \text{ctg}\, x$ б) $y = \text{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ в) $y = -\text{ctg}\, x$

15. Лестница находится на расстоянии 3 м от стены и составляет угол α с плоскостью пола. Высота от края лестницы до пола h м.

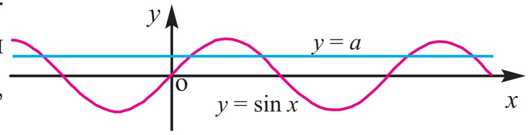


а) Запишите зависимость h от угла α при помощи функции тангенса.
б) Постройте график функции на интервале $0° \le \alpha \le 70°$.
в) Как изменяется высота h при увеличении угла α?
г) Что происходит при $\alpha = 90°$?

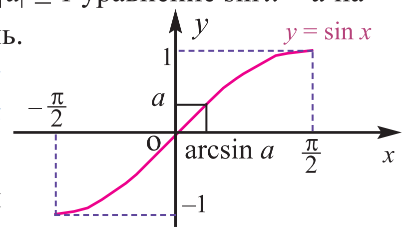
16. Камера наблюдения за забором установлена на расстоянии 5 м от середины забора. Один полный оборот обзора она выполняет за 60 секунд.



а) Камера начинает наблюдение от середины забора по участку длиной d.
Выразите в виде функции тангенса зависимость расстояния d от времени t.
Примите за начало отсчета $t = 0$ момент времени, когда точка наблюдения находится на середине забора.
Указание: При целом повороте камера совершает поворот на 360° . Найдите на сколько градусов поворачивается камера за 1 секунду.
б) Постройте график этой функции на интервале $-15 < t < 15$.
в) Какую часть забора можно наблюдать за время $t = 10$ секунд?
г) Что произойдёт в момент $t = 15$ секунд?



Точек, в которых синусоида пересекает прямую, параллельную оси абсцисс, бесконечно много. Значит, на всей числовой оси для функции $y = \sin x$ нет обратной функции. Однако, на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $y = \sin x$ возрастает и от –1 до 1 принимает все значения, а также каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции. Значит, на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ функция $\sin x$ обратима и при $|a| \leq 1$ уравнение $\sin x = a$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ имеет единственный корень.



Угол, из промежутка $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ синус которого равен a, называется арксинусом числа a и записывается как arcsin a.

Равенство $x = \arcsin a$ эквивалентно двум условиям: 1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 2) $\sin x = a$

Примеры: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Из определения имеем: $\sin(\arcsin a) = a$.

Можно показать, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

При помощи арксинуса можно задать функцию $y = \arcsin x$, с областью определения $[-1; 1]$ и множеством значений $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Функция $y = \arcsin x$ также записывается как $y = \sin^{-1}x$.

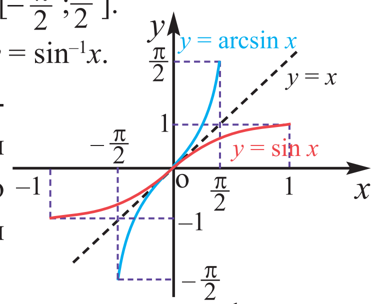
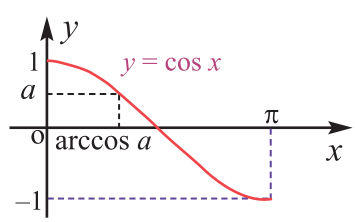


График функции $y = \arcsin x$ получается симметричным преобразованием графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ относительно прямой $y = x$. Областью определения функции $[-1; 1]$, область значений $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Аналогично получаем, что на всей числовой оси не существует функции, обратной для $y = \cos x$. Однако на отрезке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$. То есть, на отрезке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ обратима и при $|a| \leq 1$ уравнение $\cos x = a$ имеет единственный корень на $[0; \pi]$.



Угол, из промежутка $[0; \pi]$ косинус которого равен a, называется арккосинусом числа a и записывается как arccos a.

Равенство $x = \arccos a$ эквивалентно двум условиям: 1) $0 \leq x \leq \pi$ 2) $\cos x = a$

Примеры. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$

$\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$, так как $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

По определению: $\cos(\arccos a)=a$

Можно показать, что $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

Функция $y=\arccos x$, определённая на отрезке $[-1;1]$ является обратной для функции $y=\cos x$, определённой на отрезке $[0;\pi]$.

$y=\arccos x$ может быть записана как $y=\cos^{-1}x$.

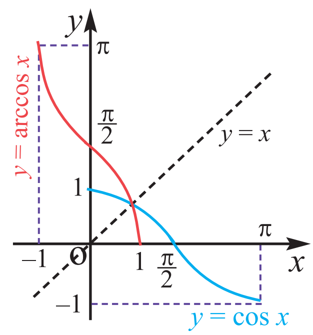
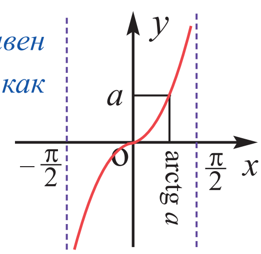


График функции $y=\arccos x$ получается симметричным преобразованием графика функции $y=\cos x$ на промежутке $[0;\pi]$ относительно прямой $y=x$. Область определения функции $y=\arccos x$ промежуток $[-1;1]$, множество значений промежуток $[0;\pi]$.

Функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ и на промежутке $(-\infty;+\infty)$ принимает все значения. Поэтому для любого числа a уравнение $\operatorname{tg}x=a$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ имеет один корень.

Угол, из промежутка $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a, называется арктангенсом числа a и записывается как arctg a.



Равенство $\operatorname{arctg}a=x$ эквивалентно двум условиям:

1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 2) $\operatorname{tg}x=a$

Примеры: $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})=-1$ və $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

По определению: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$

Можно показать, что: $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$.

Функция $y=\operatorname{arctg}x$ является обратной для функции $y=\operatorname{tg}x$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

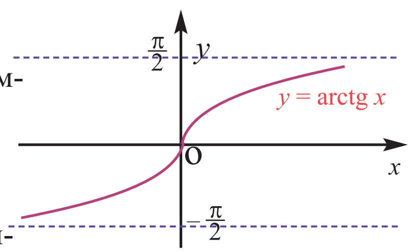
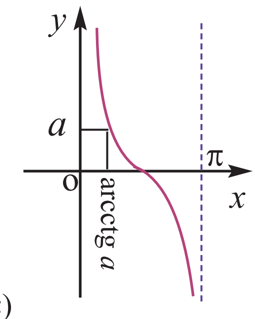


График функции $y=\operatorname{arctg}x$ получается симметричным преобразованием графика функции $y=\operatorname{tg}x$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ относительно прямой $y=x$.

Прямые $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами функции $y=\operatorname{arctg}x$.

По такому же правилу, вводится понятие арккотангенса. *Угол, из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a, называется арккотангенсом числа a и записывается как $\operatorname{arcctg} a$.*



Равенство $\operatorname{arcctg} a = x$ эквивалентно двум условиям:
1) $0 < x < \pi$ 2) $\operatorname{ctg} x = a$

Примеры: $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$

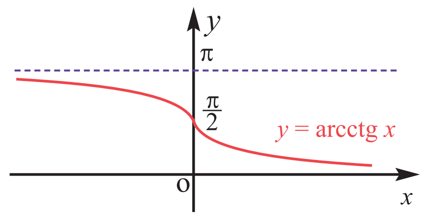
$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -1$ и $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.

По определению: $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$

Можно показать, что $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной для $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается симметричным преобразованием графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ относительно прямой $y = x$. Ось абсцисс и прямая $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами функции $y = \operatorname{arctg} x$.



Функция $y = \operatorname{arctg} x$ может быть записана как $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, а функция $y = \operatorname{arcctg} x$ может быть записана как $y = \operatorname{ctg}^{-1}x$.

На калькуляторе не предусмотрены кнопки $\operatorname{ctg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\operatorname{cosec}^{-1}x$, так как эти функции можно выразить через функции $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\sin^{-1}x$. Например, $y = \sec^{-1}x$ означает, $\sec y = x$ и эту функцию можно выразить через косинус

$\frac{1}{\cos y} = x$ $\cos y = \frac{1}{x}$ Отсюда: $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

Значит, для вычисления $y = \sec^{-1}x$ надо вычислить $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$.

Внимание! $\sin^{-1}x \xrightarrow{\text{не означает}} \frac{1}{\sin x}$

Обучающие задания

1. Найдите угол, который удовлетворяет равенству и принадлежит промежутку.

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

в) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi]$ г) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$

д) $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ е) $\operatorname{ctg} t = -1$, $(0; \pi)$

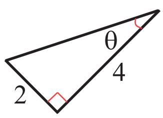
2. Значение выражения выразите в радианах и градусах.

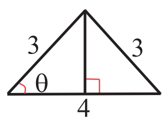
$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{arctg} \sqrt{3}$	$\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$
$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arccos 0$	$\operatorname{arctg} 1$	$\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\arcsin(-\frac{1}{2})$	$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$	$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$
		$\operatorname{arctg}(-1)$	$\operatorname{arcctg} 0$

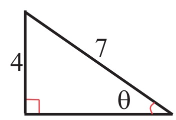
3. Вычислите значение выражения при помощи калькулятора. Результат округлите до сотых.

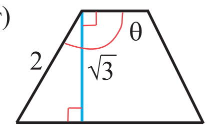
а) $\operatorname{tg}^{-1} 3{,}9$ б) $\cos^{-1} 0{,}24$ в) $\sin^{-1} 0{,}24$ г) $\sin^{-1} 0{,}75$
д) $\sin^{-1} (-0{,}4)$ е) $\cos^{-1} (-0{,}6)$ ж) $\operatorname{tg}^{-1} (-0{,}2)$ з) $\operatorname{tg}^{-1} 2{,}25$

4. Найдите угол θ.

а)


б)


в)


г)


5. Найдите значение выражения.

а) $\arcsin 0 + \arcsin 1$ б) $\arccos(-1) - \arccos 0$
в) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1)$

6. Проверьте равенство.

а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$ б) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$

7. Вычислите.

а) $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$ б) $\sin(\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}))$ в) $\operatorname{tg}(2\cdot\operatorname{arctg} \sqrt{3})$
г) $\operatorname{ctg}(2\cdot\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$ д) $\sin(2\cdot\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$ е) $\cos(3\cdot\arccos \frac{1}{2})$

8. Найдите угол α.

а) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ г) $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
б) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ д) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
в) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ е) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

9. При каком значении угла α верно равенство? Вычислите при помощи калькулятора.

а) $\sin \alpha = -0{,}35$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ в) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}4$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
б) $\cos \alpha = 0{,}43$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ г) $\sin \alpha = 0{,}8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Обратные тригонометрические функции

10. Вычислите значения выражения.

а) $\sin(\arccos\frac{3}{5})$ б) $\cos(\arcsin(\frac{5}{13}))$

в) $\sin(2\cdot\arccos\frac{4}{5})$ г) $\cos(2\cdot\arccos\frac{3}{5})$

д) $\cos(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{12}{13})$ е) $\sin(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13})$

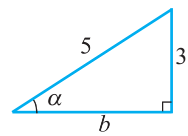
Пример. Найдите значение выражения $\sin(2\cdot\arcsin\frac{3}{5})$.

Пусть $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$. Тогда, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

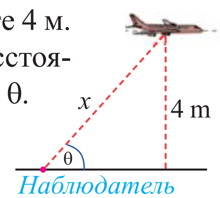
В прямоугольном треугольнике, найдём катет, прилежащий к углу α, если синус острого угла равен $\frac{3}{5}$: $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Отсюда, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Учитывая обозначение, имеем:

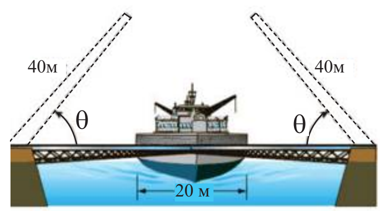
$\sin(2\cdot\arcsin\frac{3}{5}) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.



11. Игрушечный моторный самолёт может лететь на высоте 4 м.
а) Запишите функцию, выражающую зависимость расстояния между наблюдателем и самолётом от угла подъёма θ.
б) Сколько градусов составит угол θ, если расстояние от самолёта до наблюдателя равно 25 м?



12. Для обеспечения прохода больших судов под мостами их делают разводными. Длина каждого крыла разводного моста через реку 40 м. На какой наименьший угол (в градусах) должны подниматься крылья моста, чтобы судно любой высоты и длиной 20 м могло безопасно пройти под мостом?



13. Вычислите.

а) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{6})$ б) $\arccos(\cos\frac{\pi}{6})$ в) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3})$

14. Энвер и Лала вычислили значение выражения $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$ так:

Энвер: $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$

Лала: $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{3})) = \arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

Кто из них верно вычислил значение выражения? Ответ обоснуйте.

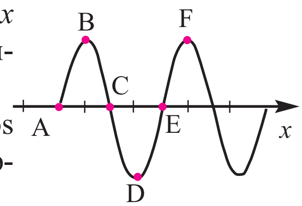
15. Найдите значение выражения.

а) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6})$ б) $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3})$ в) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{2\pi}{3})$

Обобщающие задания

1. Покажите на графике точки пересечения с осью x, максимумы и минимумы функции.

а) Если график соответствует функции $y = 2\sin 3x$ и координаты точки A(0; 0), то найдите координаты точек B, C, D, E, F.



б) Если график соответствует функции $y = 3\cos 2x$ и координаты точки B(0; 3), то найдите координаты точек A, C, D, E, F.

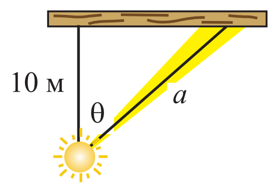
в) Если график соответствует функции $y = \sin\frac{1}{2}x$ и координаты точки $A(-2\pi; 0)$, то найдите координаты точек B, C, D, E, F.

2. Запишите две различные функции синуса и косинуса, если область определения множество всех действительных чисел $\{x \mid x \in R\}$, а множество значений отрезок $[-3; 3]$.

3. Найдите период и амплитуду функции и постройте её график.

1) $y = 6\sin\frac{2}{3}x$ 2) $y = 3\cos\frac{1}{2}x$ 3) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$ 4) $2y = \operatorname{tg} 2x$

4. Рекламная надпись освещается от источника, расположенного на расстоянии 10 м от здания.



а) Выразите зависимость расстояния a от угла θ в виде тригонометрической функции.

б) Заполните таблицу, округлив значения a до десятых.

θ	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$
a				

в) Как видно из таблицы, значения θ увеличиваются на одинаковый шаг. Верно ли данное предположение для значений a?

г) Если $0 \le \theta \le \frac{4\pi}{9}$, то какую наибольшую часть рекламного щита освещает источник?

5. а) Минимум синусоиды расположен в точке (18;44), а максимум в точке (30; 68). Найдите амплитуду функции.

б) За один период синусоида достигает максимально значения в точке (4; 12), минимального значения в точке (12; –2). Найдите период функции.

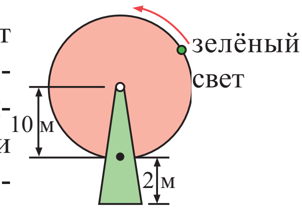
в) На отрезке, длиной в один период, синусоида достигает максимума в точке (π;7), минимума в точке $(\frac{\pi}{2}; 3)$. Запишите формулу этой функции в виде $y = d + a\cos bx$.

6. Вычислите.

а) $\sin(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2})$ б) $\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{4}{5})$

Обобщающие задания

7. Смоделируйте функцию синуса, которая позволит определить расстояние от земли до зелёной лампочки на карусели в любой момент времени. Примите самый нижний уровень зелёной лампочки при $t = 0$. Карусель совершает один полный оборот за 100 секунд.



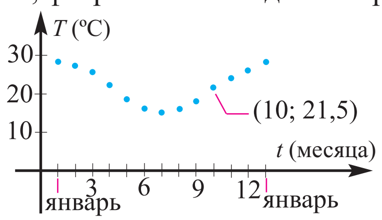
8. Глубина воды. В таблице представлена информация об изменении уровня воды на пляже с полуночи до полудня.
а) Смоделируйте изменение глубины воды при помощи функции вида $y = d + a\cos(bt + c)$.
б) На сколько изменилась глубина с 7 до 9 часов утра?

Время, t	Глубина, y
Полночь	3,2
02:00	9
04:00	11,9
06:00	9
08:00	3,2
10:00	0,3
Полдень	3,2

9. Изменение температуры. В Южно-Африканских странах преобладает тропический и субтропический климат. В этой части Земного шара с июня по август бывает зима. В таблице представлена ежемесячная максимальная температура за год в городе Кейптаун (ЮАР).

Месяца	Январь	Февраль	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Ноябрь	Дек.
Темп. (°C)	28	27	25	22	18,5	16	15	16	18	21,5	24	26

По данным таблицы построен график. На горизонтальной оси последовательно отмечены месяца: январь $t = 1$, февраль $t = 2$ и т.д.. На вертикальной оси отмечена температура.
Таблицу и график нарисуйте в тетрадь. Зная, что среднемесячная температура будет приблизительно повторяться в следующие 12 месяцев, продолжите график на следующие 12 месяцев.



10. Результат подъёма и опускания (в метрах) судна на волнах может быть смоделирован функцией $d = 0{,}6 \sin \pi t$. Здесь t показывает время (сек.).
Начертите график функции на одном целом периоде.

11. Вопрос открытого типа. Запишите тригонометрическую функции с амплитудой $\frac{1}{2}$ и периодом π и постройте её график.

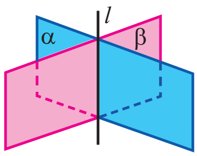
6 Многогранники

Многогранники
Призмы
Многогранники. Виды многогранников с различных сторон
Площадь поверхности призмы
Сечения призмы плоскостью
Пирамида. Площадь полной и боковой поверхности пирамиды
Сечения пирамиды. Усечённая пирамида

Многогранники

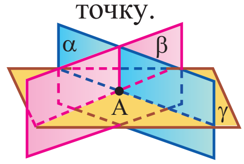
Плоскости в пространстве могут располагаться различным образом.

Пересекающиеся плоскости.



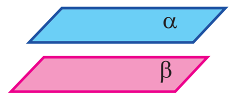
$\alpha \cap \beta = l$

Три или более плоскостей, имеющие одну общую точку.



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A$

Не пересекающиеся плоскости.



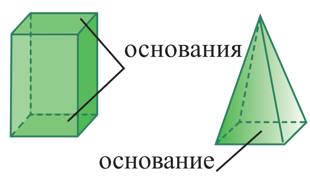
$\alpha \parallel \beta$

Плоскости, располагаясь в пространстве различным образом, образуют так называемые пространственные фигуры- многогранники.

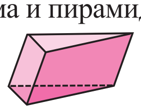
Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников, которые называются **гранями**. У многогранника не менее 4 граней. Отрезки, по которым пересекаются грани, называются **рёбрами**, а точки в которых пересекаются рёбра, называются **вершинами**. Отрезок, соединяющий две вершины не лежащие в одной грани, называется диагональю.

Призма — многогранник, две грани которого являются конгруэнтными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.

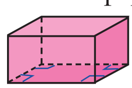
Пирамида —это многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные грани - треугольники с общей вершиной.



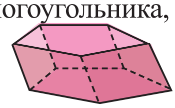
Призма и пирамида называется по форме многоугольника, лежащего в основании.



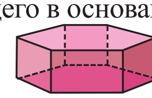
треугольная призма



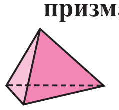
прямоугольный параллелепипед



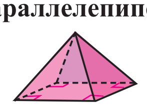
пятиугольная призма



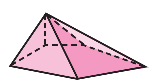
шестиугольная призма



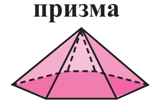
треугольная пирамида



четырёхугольная пирамида



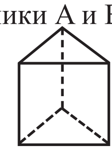
пятиугольная пирамида



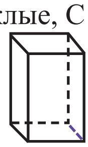
шестиугольная пирамида

Многогранники бывают двух видов: выпуклые и вогнутые. Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он является выпуклым. У выпуклого многогранника две произвольным образом взятые точки, соединённые отрезком, располагаются во внутренней области. Многогранники A и B выпуклые, C и D - вогнутые.

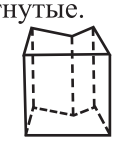
A.



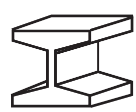
B.



C.



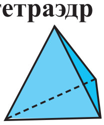
D.



Многогранники

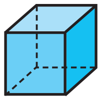
Выпуклый многогранник, все грани которого являются конгруэнтными правильными многоугольниками, и в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер, называется правильным. Эти фигуры так же называют платоновыми телами. Например, куб является правильным многогранником. Различают пять видов платоновых тел: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

тетраэдр



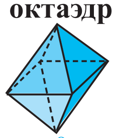
имеет 4 грани, каждая из которых правильный треугольник

куб



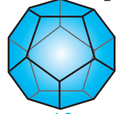
имеет 6 граней, каждая из которых квадрат

октаэдр



имеет 8 граней, каждая из которых правильный треугольник

додекаэдр

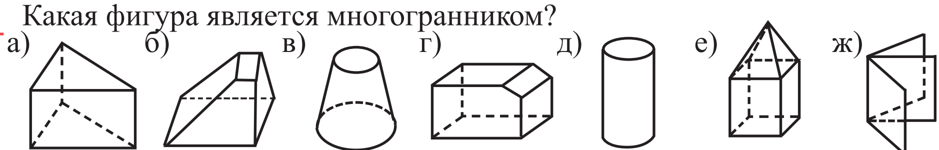


имеет 12 граней, каждая из которых правильный пятиугольник

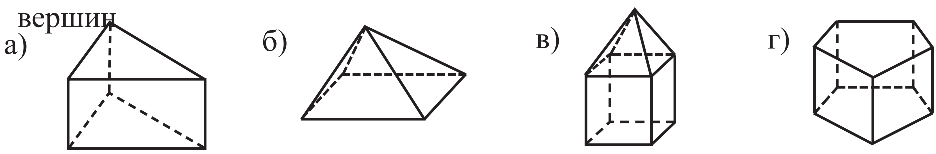
икосаэдр

имеет 20 граней, каждая из которых правильный треугольник

1. Какая фигура является многогранником?



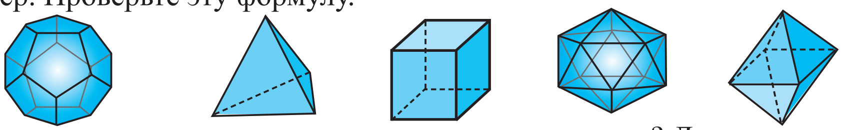
2. Для каждого многогранника определите количество граней, рёбер и вершин



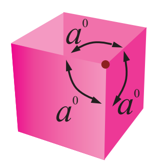
3. Начертите таблицу в тетрадь и заполните её.

У произвольного многогранника между числом граней, рёбер и вершин существует связь, выражаемая формулой Эйлера:
$F + V - E = 2$, здесь F (fase) количество граней, V (vertex) количество вершин, E (edges) количество рёбер. Проверьте эту формулу.

Многогранник	Форма грани	Грани (F)	Вершины (V)	Рёбра (E)
тетраэдр				
куб				
октаэдр				
додекаэдр				
икосаэдр				

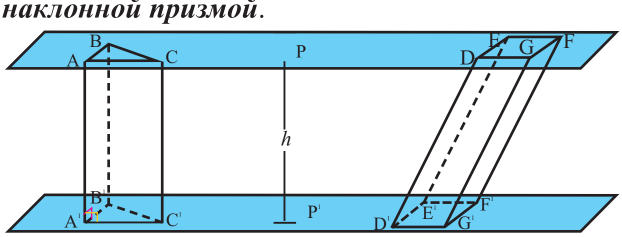


4. Почему существует только пять видов платоновых тел? Для ответа на этот вопрос обратите внимание на зависимость между суммой углов с общей вершиной трёх многоугольников и формой многоугольника, являющегося гранью многогранника. Какова наибольшая градусная мера этой суммы? Если грань многогранника будет шестиугольником, чему будет равна сумма общих углов при вершине?



Призмы

Два конгруэнтных многоугольника, расположенных в параллельных плоскостях и совпадающих при параллельном переносе, и все отрезки, которые соединяют соответствующие точки многоугольников, образуют фигуру, которая называется призмой. Многоугольники называются ***основаниями призмы***, а отрезки прямых, соединяющих соответственные вершины, называются ***боковыми рёбрами призмы***. Часть плоскости, проходящей через боковые рёбра призмы, называется ***боковыми гранями призмы***. Боковые грани призмы параллелограммы. У каждого параллелограмма две стороны соответствуют сторонам основания, а две другие являются боковыми рёбрами. Если боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания, то призма называется ***прямой призмой***, если не перпендикулярны, то призма называется ***наклонной призмой***.

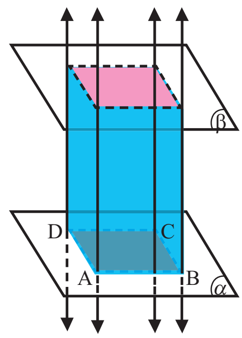


а) Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

Прямая призма, в основании которой лежит треугольник

б) DEFG ≅ D'E'F'G'

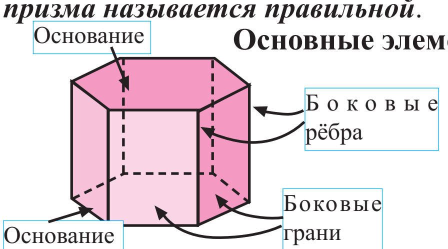
Наклонная призма, в основании которой лежит четырехугольник



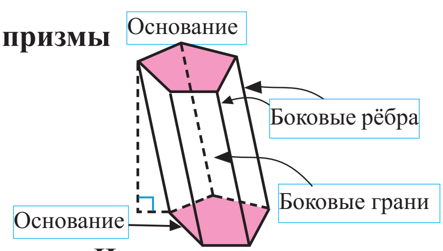
Боковые грани правильной призмы прямоугольники.

Если в основании прямой призмы лежит правильный многоугольник, то ***призма называется правильной***.

Основные элементы призмы

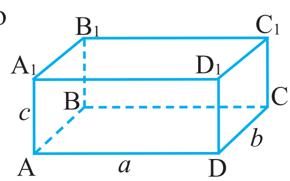


Прямая призма



Наклонная призма

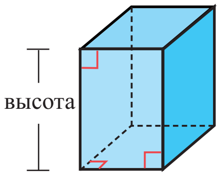
Если в основании призмы лежит n - угольник, то она называется n-угольной призмой. n-угольная призма имеет: $2n$ вершин, $n + 2$ граней, $2n$ рёбер. Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется параллелепипедом. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и конгруэнтны. Параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. На рисунке показан прямоугольный параллелепипед ABCDA′B′C′D′. Рёбра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, называются измерениями параллелепипеда.

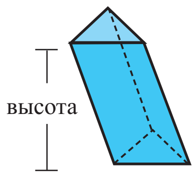


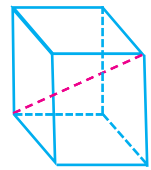
Призмы

Расстояние между основаниями призмы называется ***высотой.*** Боковые рёбра прямой призмы являются её высотами.

Прямая, соединяющая две вершины призмы не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** призмы.

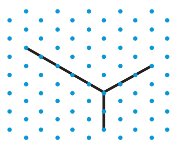




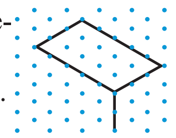


Изобразите на изометрической бумаге прямоугольный параллелепипед с измерениями 5×3×2.

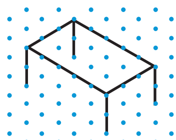
Выберите точку вершины призмы и от неё начертите отрезки: на 2 единицы вниз, на 5 единиц влево и 3 единицы вправо.



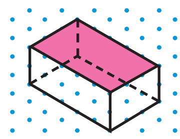
Начертите параллелограмм - верхнее основание призмы.



Из каждой вершины параллелограмма начертите отрезки длиной 2 единицы.



Последовательно соедините концы отрезков. Не забудьте невидимые рёбра изобразить пунктиром.

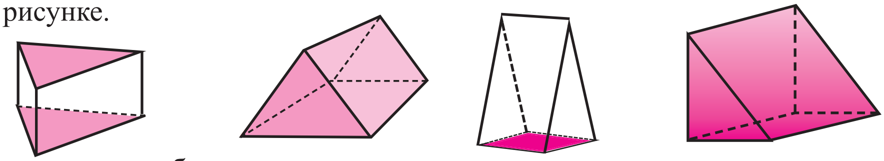


1. По заданным измерениям начертите:

а) прямоугольный параллелепипед с размерами 3×4×3

б) куб, длина ребра которого равна 5

2. Призма на рисунке состоит из: 2 параллельных и конгруэнтных треугольников, 5 граней, 9 рёбер и 6 вершин. Треугольная призма может быть изображена различным образом. Приняв во внимание, что 2 грани призмы являются треугольниками, а 3 грани четырёхугольниками, изобразите на изометрической бумаге данную призму с различных сторон, как показано на рисунке.



3. На рисунке изображена правильная шестиугольная призма. Ответьте на вопросы.

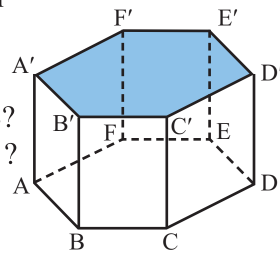
а) Какая плоскость параллельна плоскости CDE?

б) Какая плоскость не параллельна плоскости A′AB?

в) Какие прямые перпендикулярны плоскости ABC ?

г) Почему длины отрезков AA′ и DD′ равны?

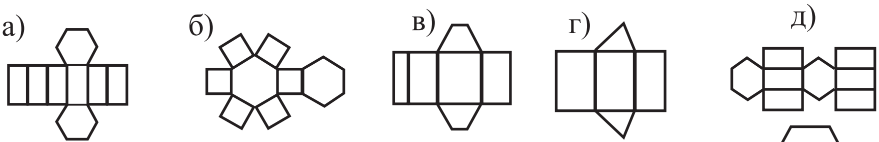
д) Запишите название граней многогранника.



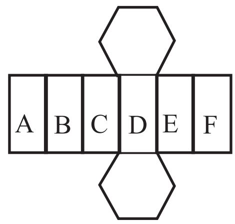
Призмы

4. Если многогранник разрезать по некоторым рёбрам и разложить на плоскости, то получим развёртку многогранника. Какой призме соответствует каждая развёртка? Запишите количество граней, рёбер и вершин.

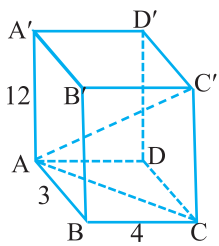
а) б) в) г) д)



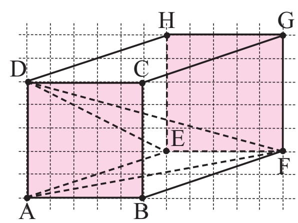
5. На рисунке дана развёртка правильной шестиугольной призмы, боковые грани которой обозначены буквами. Какая грань призмы параллельна грани F?



6. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 3×4×12. Найдите диагональ основания AC и диагональ параллелепипеда AC′.



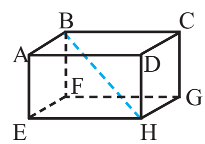
7. Две боковые противоположные грани параллелепипеда на рисунке являются квадратами со стороной 4 см. Длина ребра AE 7 см. Найдите длину DF.



8. Выполните задания для прямоугольного параллелепипеда на рисунке.

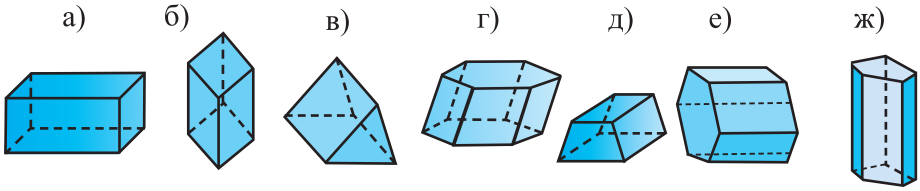
а) Вершины B и H граней ABC и EHG соединены диагональю. Изобразите все возможные диагонали и запишите вершины каких граней они соединяют.

б) Покажите две какие-либо перпендикулярные грани и обоснуйте их перпендикулярность, используя различные теоремы и определения.



9. Для каждой из призм запишите: название, количество рёбер, граней и вершин. Для каждой из призм проверьте формулу Эйлера.

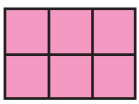
а) б) в) г) д) е) ж)



При помощи кубов можно получать различные конструкции. Их называют кубоиды. Виды кубоидов с различных сторон (план) или наоборот, сборка конструкции кубоида по плану имеет большое практическое значение.

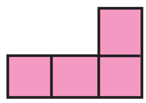
Практическая работа. Ниже представлены вид сверху, вид сбоку и вид спереди конструкции фигуры, по которым построена сама фигура и её изображение на изометрической бумаге. Для примера представлено изображение фигуры сверху, сбоку и спереди. Составьте различные конструкции из кубов и изобразите их на изометрической бумаге.

Вид сверху



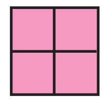
Вид сверху помогает построить основание фигуры

Вид сбоку

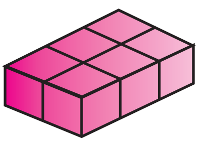


Вид сбоку помогает достроить фигуру до конца

Вид впереди

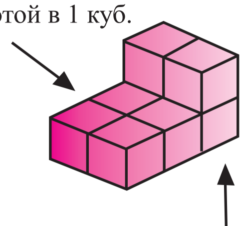


Вид впереди помогает проверить правильно ли выполнено построение



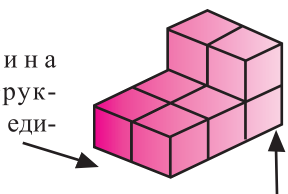
Основание прямоугольник с размерами 2×3 единицы (в кубах)

1-ый и 2-ой ряд высотой в 1 куб.



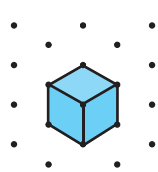
3-ий ряд высотой в 2 куба

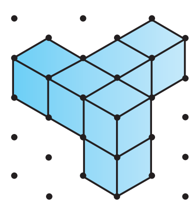
Ширина конструкции 2 единицы



Высота конструкции 2 куба

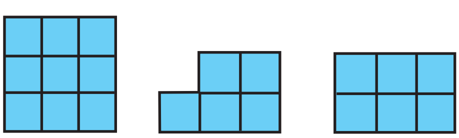
Для изображения трёхмерных фигур удобно использовать изометрическую бумагу. Например, рёбра куба равные единице равны единице расстояния между точками. Получить изображение куба можно отметив вершины и соединив их. Аналогичным образом строятся все кубы из которых состоит кубоид.



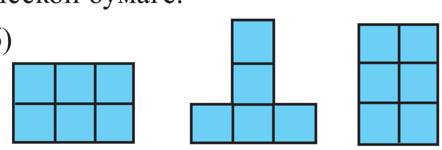


1. Постройте конструкцию из кубов по заданным различным видам и изобразите конструкцию на изометрической бумаге.

а)

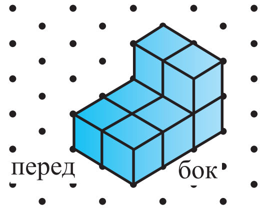


б)

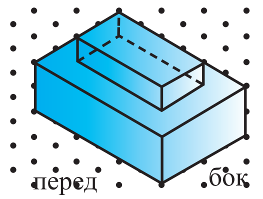


Многогранники и их виды с различных сторон.

2. Какой из видов: сверху, сбоку или спереди на рисунке, позволяет установить одинакова ли высота конструкции? Изобразите и покажите.



3. На рисунке дано изображение здания, которое будет построено. Начертите вид сверху, снизу и сбоку. На рисунке каждая единица соответствует 15 м. По виду сверху, определите скольким квадратным метрам равна площадь основания.



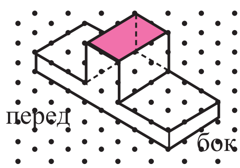
4. Выполните задания для каждой из представленных конструкций.

а) Начертите виды с разных сторон.

б) Найдите площадь закрашенной поверхности.

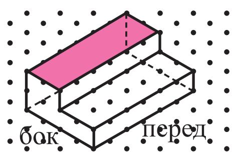
в) Скольким сантиметрам равна самая высокая точка конструкции?

Пьедестал



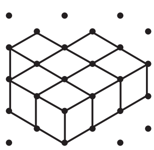
1 единица = 0,2 м

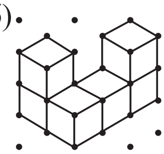
Лестница

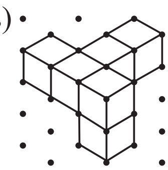


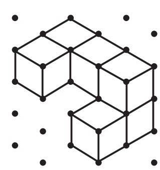
1 единица = 0,25 м

5. Изобразите каждую конструкцию на изометрической бумаге, а также начертите вид сверху,спереди и сбоку.

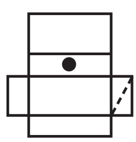
а) 

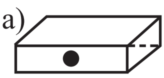
б) 

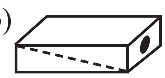
в) 

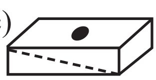
г) 

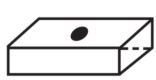
6. Какой фигуре соответствует развёртка?



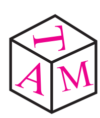
a) 

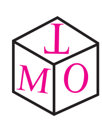
b) 

c) 

d) 

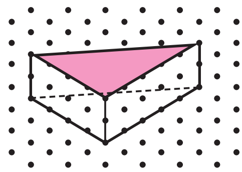
7. На рисунке даны три вида куба с различных сторон. Определите буквы на противоположных гранях куба.





8. Изобразите следующие призмы на изометрической бумаге.

Пример. а) Прямая треугольная призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, с катетами 4 единицы и 5 единиц, и высотой 2 единицы.



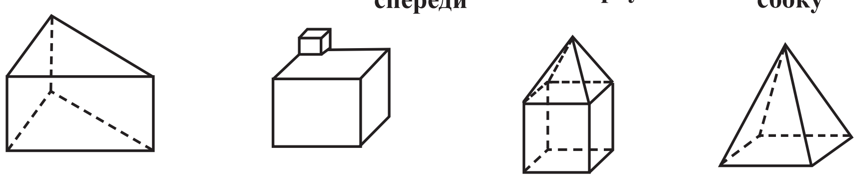
б) Прямоугольный параллелепипед с высотой 2 единицы, шириной 3 единицы и длиной 5 единиц.

в) Прямая треугольная призма в основании которой лежит прямоугольный треугольник, с катетами 3 единицы и 5 единиц, и высотой 2 единицы.

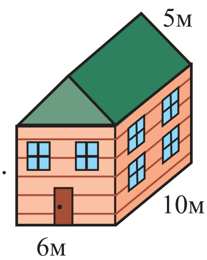
9. Минералы в природе представляют собой кристаллы различной формы. Помимо сравнительно недорогих минералов, таких как аметист, кварц, изумруд и т.д., существуют и очень дорогие - алмаз, ягут, фируза, сапфир. На рисунке представлены кристаллы и геометрическая фигуры, задающие их форму. Изобразите вид кристалла сверху и сбоку.

10. Изобразите вид многогранников сверху, снизу и сбоку.

Пример.



11. а) Изобразите вид дома сверху, снизу и сбоку.
б) Найдите размеры крыши дома.



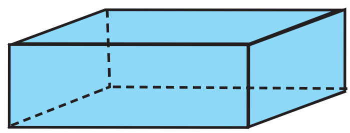
12. Найдите диагональ параллелепипеда с измерениями.
а) 6; 8; 24 б) 12; 16; 21

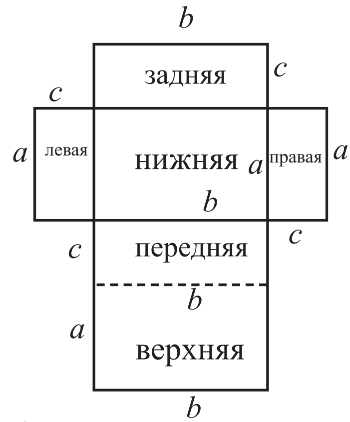
13. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, если боковое ребро равно 5 см, а в основании лежит параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см и диагональю 12 см.

14. Острый угол в основании прямого параллелепипеда равен 60°, а каждое ребро равно a. Найдите диагонали параллелепипеда.

Площадь поверхности призмы

Исследование 1. Изобразим развёртку прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c.





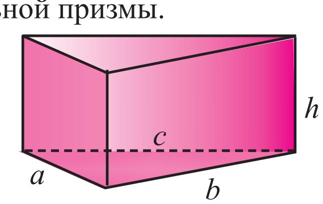
Поверхность параллелепипеда состоит из 6 попарно конгруэнтных прямоугольников и чтобы вычислить площадь полной поверхности, надо вычислить площади его граней.

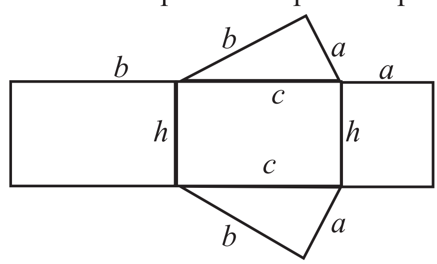
Грани	Площади
1. Правая и левая:	$ac + ac = 2ac$
2. Нижняя и верхняя:	$ab + ab = 2ab$
2. Передняя и задняя	$bc + bc = 2bc$

Сумма площадей всех граней: $S = 2ab + 2bc + 2ac$

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с длиной a, шириной b и высотой c вычисляется по формуле $S = 2(ab + ac + bc)$.

Исследование 2. Площадь боковой и полной поверхности прямой треугольной призмы.





1. Вычислите площадь боковой и полной поверхности прямой треугольной призмы с высотой h сторонами основания a, b, c.

2. Начертим развёртку призмы.

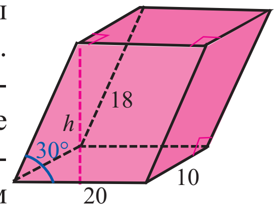
3. Боковая поверхность призмы состоит из трёх прямоугольников. Сумма площадей этих прямоугольников составляет площадь боковой поверхности. Площадь боковой поверхности:

$ah + bh + ch = (a + b + c)h = Ph$, где P - периметр основания.

4. Чтобы найти площадь полной поверхности, надо найти площади оснований. В нашем случае основание треугольное. Значит, для данной призмы площадь полной поверхности равна сумме площадей двух треугольников и площади боковой поверхности. Здесь площадь треугольника может быть вычислена по формуле Герона.

Площадь поверхности призмы.

Исследование 3. Основаниями наклонной призмы являются два прямоугольника со сторонами 10×20. Две боковые грани (левая и правая) являются конгруэнтными прямоугольниками с длинами 10 и 18, две оставшиеся грани (передняя и задняя) являются параллелограммами со сторонами 20 и 18 и острым углом 30º. Найдите площадь полной поверхности.



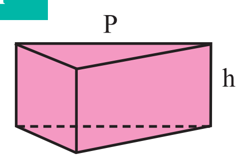
Для того, чтобы найти площади передней и задней поверхностей призмы, являющимися параллелограммами, найдём высоту.

$$\sin 30° = \frac{h}{18} \qquad h = 9$$

Сумма площадей передней и задней граней: $2 \cdot 20 \cdot 9 = 360$ (кв.ед.)
Сумма площадей правой и левой граней: $2 \cdot 10 \cdot 18 = 360$ (кв.ед.)
Сумма площадей основания: $2 \cdot 20 \cdot 10 = 400$ (кв.ед.)
Площадь полной поверхности: $360 + 360 + 400 = 1120$ (кв.ед.)

Площадь боковой поверхности прямой призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания многоугольника на высоту (боковое ребро).



$$\boldsymbol{S_{бок} = Ph}$$

Здесь P показывает периметр основания, а h высоту призмы.

Площадь полной поверхности призмы

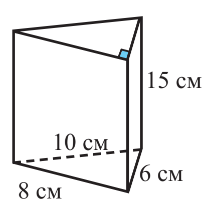
Площадь полной поверхности призмы равна сумме площадей основания и боковой поверхности.

$$\boldsymbol{S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}}$$

Площадь полной поверхности прямой призмы вычисляется по формуле: $\boldsymbol{S = 2S_{осн.} + Ph}$

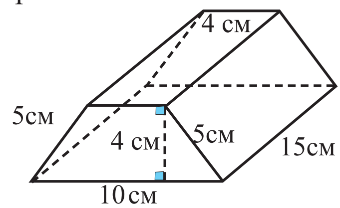
Пример. Вычислим площадь полной поверхности прямой призмы.

а) Найдём площадь полной поверхности прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник .



$S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{бок.} = 2S_{осн.} + Ph$
$2S_{осн.} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$ (см²)
$S_{бок.} = Ph = (10 + 8 + 6) \cdot 15 = 360$ (см²)
$S_{п.п.} = 48$ см² $+ 360$ см² $= 408$ (см²)

б) Найдём площадь полной поверхности прямой призмы в основании которой лежит трапеция.



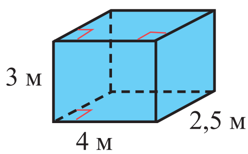
$S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{бок.} = 2S_{осн.} + Ph$

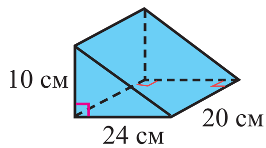
$2S_{осн.} = 2 \cdot (\frac{1}{2}(10 + 4) \cdot 4) = 56$ (см²)

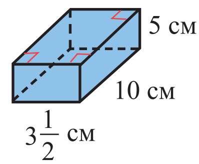
$S_{бок.} = Ph = (10 + 5 + 5 + 4) \cdot 15 = 360$ (см²)

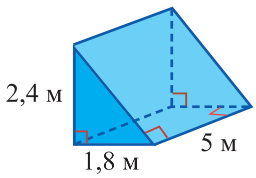
$S_{п.п.} = 56 + 360 = 416$ (см²)

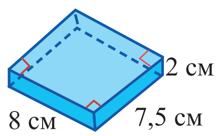
1. Вычислите площадь боковой и полной поверхности прямой призмы.

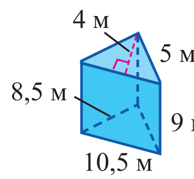




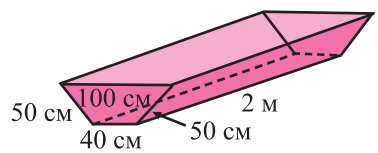






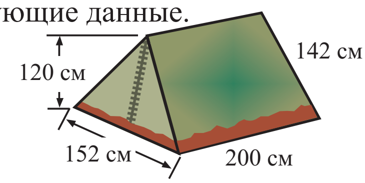


2. а) Хикмат хочет сделать поилку для лошадей, в форме прямой призмы в основании которой лежит трапеция. Какое наименьшее количество материала потребуется для этого?



б) В основании прямой призмы с высотой 6 м лежит равнобокая трапеция. Основания трапеции равны 2 м и 8 м, а боковая сторона 5 м. Найдите площадь полной поверхности призмы. Изобразите соответствующую призму и запишите соответствующие данные.

3. Какое наименьшее количество материала (в метрах) потребуется для палатки?

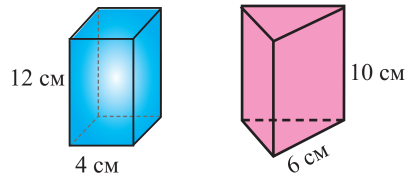


4. Рёбра прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 7 : 8, а полная поверхность равна 808 см². Найдите длины рёбер.

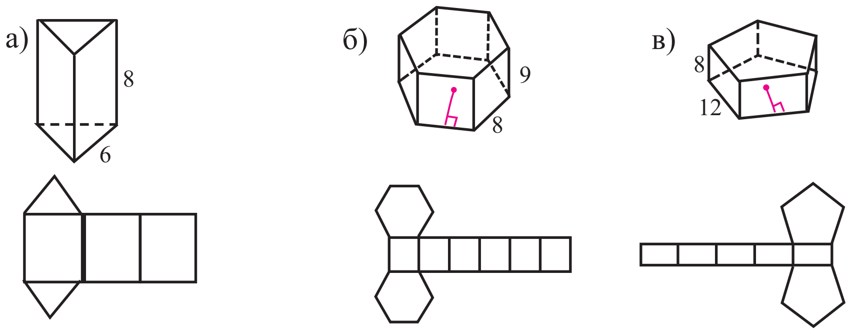
5. Угол, между сторонами основания прямого параллелепипеда, составляет 30°. Зная, что боковое ребро равно 5 см, а стороны основания 6 см и 8 см, найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы с диагональю 14 см, если диагональ боковой грани равна 10 см.

7. По данным на рисунке найдите площадь полной поверхности правильных призм.

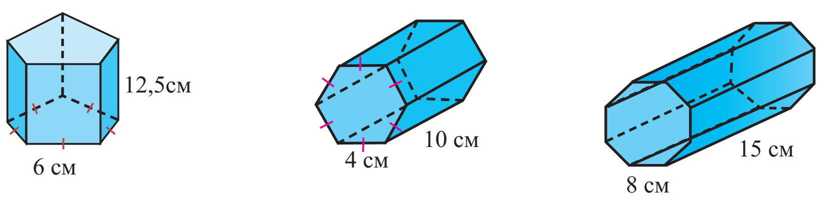


8. Начертите фигуры и их развёртки в тетрадь. Запишите соответствующие измерения на развёртке. Вычислите площадь полной поверхности.

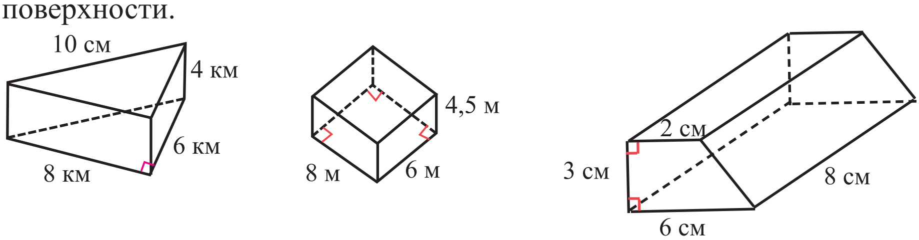


9. Найдите площадь полной поверхности призм на рисунке.

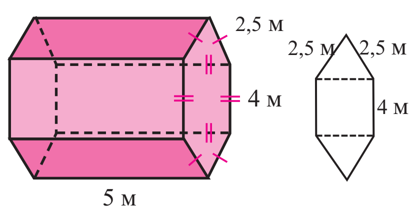
правильная пятиугольная — правильная шестиугольная — правильная восьмиугольная



10. Начертите прямые призмы и их развёртки и найдите площадь полной поверхности.



11. Для прямой призмы на рисунке найдите:
а) площади оснований;
б) площадь боковой поверхности;
в) площадь полной поверхности.

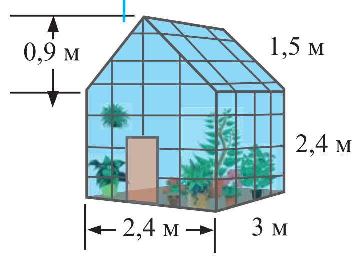


Площадь поверхности призмы

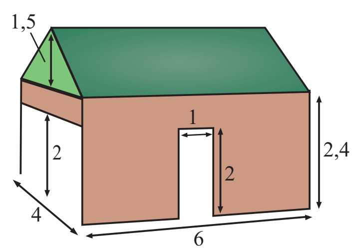
12. По следующим данным изобразите прямую призму и найдите площадь полной поверхности.

Основание призмы	Высота призмы
а) равносторонний треугольник со стороной 8 единиц	10 единиц.
б) треугольник со сторонами 13; 14; 15 единиц	12 единиц
в) равнобедренный треугольник со сторонами 12; 10; 10 единиц	7 единиц
г) трапеция с основаниями 4 и 10 единиц	20 единиц
е) ромб с диагоналями 8 и 6 единиц	10 единиц
ж) правильный шестиугольник со стороной 8 единиц	11 единиц

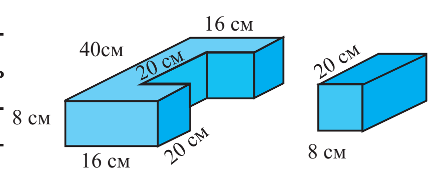
13. Стены и крыша зимнего сада должны быть покрыть прозрачными пластиковыми пластинами, как показано на рисунке. Площадь двери 1,8 м². Найдите сколько квадратных метров пластика понадобится для того, чтобы застеклить зимний сад.



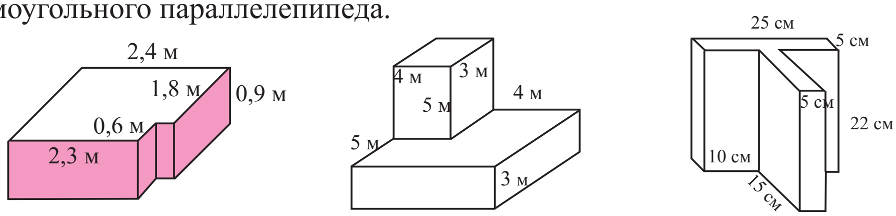
14. Чтобы покрасить площадь 30 м² потребуется приблизительно 4 *л* краски. Сколько литров краски потребуется для того, чтобы два раза покрасить стены дома на рисунке. Размеры на рисунке указаны в метрах.



15. От деревянного бруска в форме параллелепипеда отрезали кусок, как показано на рисунке. Как изменилась площадь полной поверхности оставшейся части? Ответ обоснуйте при помощи вычислений.



16. Найдите площадь полной поверхности фигуры, полученной из прямоугольного параллелепипеда.



Сечение призмы плоскостью

Исследование. Кусок сыра имеет форму прямой призмы. Как нужно разрезать сыр, чтобы полученный ломтик имел форму:

а) прямоугольника

а) Кусок сыра спереди и сбоку имеет форму прямоугольника. Разрезав сыр по вертикали, получим ломтик прямоугольной формы.

б) треугольника

б) Кусок сыра сверху имеет форму треугольника. Разрезав сыр по горизонтали получим ломтик треугольной формы.

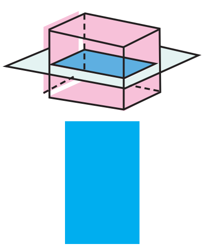
в) трапеции

в) Кусок сыра сбоку имеет вид прямоугольника. Разрезав сыр под определённым углом получим ломтик в форме трапеции.

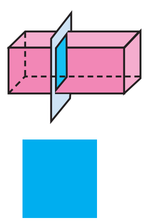
Сечение призмы плоскостью

При сечении призм плоскостью в результате на ней остаётся след, определяющий форму сечения. На рисунке изображены сечения плоскостью прямоугольного параллелепипеда.

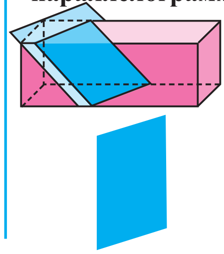
Сечение плоскостью параллельной основаниям.
Сечение - прямоугольник



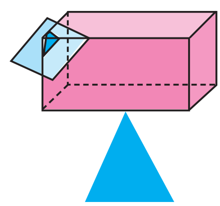
Сечение плоскостью перпендикулярной основаниям.
Сечение - прямоугольник



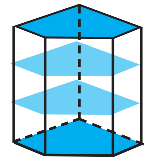
Сечение плоскостью под определённым углом к плоскости основания через противоположные грани.
Сечение - параллелограмм



Сечение плоскостью под определённым углом к плоскости основания через рёбра из одной вершины.
Сечение - треугольник



Будьте внимательны! Сечение плоскостью не означает отсечённую часть. Сечение -это след, который остаётся при сечении на плоскости.



Плоскость, перпендикулярная боковым рёбрам призмы, называется ***перпендикулярным сечением***. Сечением призмы, параллельное основанию является многоугольник, конгруэнтный основанию.

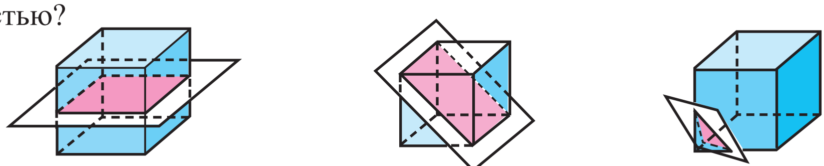
Сечение, проходящее через боковые рёбра, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональным сечением призмы***.

Количество диагональных сечений n-угольной призмы равно: $\frac{n(n-3)}{2}$

Так как каждое диагональное сечение призмы является параллелограммом, то количество диагоналей n-угольной призмы равно: $n(n-3)$.

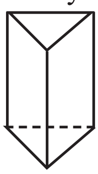
Сечение призмы плоскостью

1. Установите, какой многоугольник получается при сечении куба плоскостью?

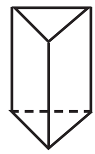


2. Для каждой призмы изобразите сечение плоскостью и определите вид полученного в сечении многоугольника.

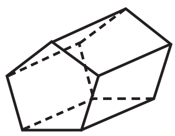
Параллельно плоскости основания.



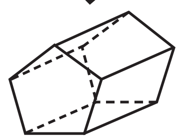
Перпендикулярно плоскости основания.



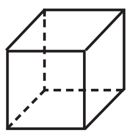
Параллельно плоскости основания.



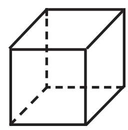
Перпендикулярно плоскости основания.



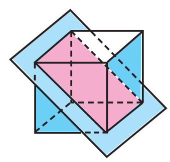
Под углом к плоскости основания, через рёбра, выходящие из одной вершины.



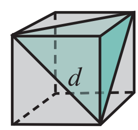
Под углом к плоскости основания, через заднюю и переднюю грани.



3. 1) Найдите периметр сечения плоскости куба на рисунке, если ребро куба равно 6 см.



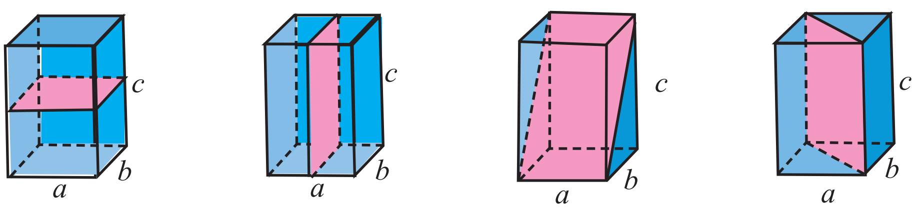
2) На рисунке показано сечение куба плоскостью, проходящей через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины. Какая фигура получилась в сечении?



а) Найдите длину отрезка d, если ребро куба равно 1 см.

б) Если ребро куба равно $3\sqrt{2}$ см, то найдите периметр фигуры, полученной в сечении.

4. Измерения прямоугольного параллелепипеда 9 см × 12 см × 20 см. Найдите периметр и площадь фигуры, являющейся сечением.



5. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 7 см и 24 см, а высота 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.

6. Площадь большего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 2 см^2. Найдите площадь боковой поверхности.

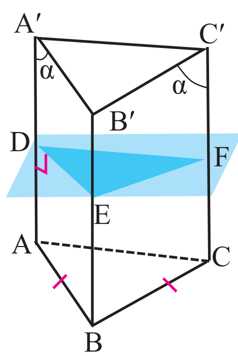
7. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб, если площади диагональных сечений равны 42 см^2 и 56 см^2.

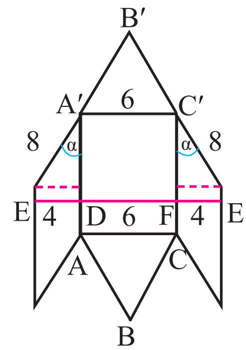
8. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы с диагоналями 8 см и 5 см, в основании которой лежит ромб, если её высота равна 2 см.

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра: $\boldsymbol{S_{бок.} = P_{\perp сеч.} \cdot l}$.
Так как в прямой призме перпендикулярное сечение конгруэнтно основанию, то вместо периметра перпендикулярного сечения используется периметр основания. При помощи перпендикулярного сечения можно найти площадь боковой поверхности наклонной призмы. Площадь боковой поверхности наклонной призмы можно найти, вычислив площадь каждой боковой грани в отдельности и сложив их (смотрите исследование 3)

Пример. Основанием наклонной призмы является равнобедренний треугольник. Грань $ACA'C'$ - прямоугольник. Если $AA' = 12$ см, $AB = BC = 8$ см, $AC = 6$ см и $\alpha = 30°$, найдём площадь боковой поверхности.

Решение: Площадь боковой поверхности призмы: $S_{бок.} = P_{\perp сеч.} \cdot l$
Перпендикулярным сечением призмы является треугольник DEF.



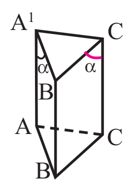


Решение задачи более удобно провести на чертеже представленном в открытом виде. DE и FE равны катетам лежащим напротив угла 30° и следовательно они равны 4 см. Периметр перпендикулярного сечения DEF равен $DE + DF + FE = 4 + 6 + 4 = 14$ (см) $\quad S_{бок.} = P_{\perp сеч.} \cdot AA' = 14 \cdot 12 = 168$ (см^2)

9. Основание наклонной призмы прямоугольник со сторонами 6 см и 4 см. Две грани являются прямоугольниками со сторонами 6 см и 8 см, а две другие грани параллелограммами со сторонами 4 см и 8 см и острым углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности наклонной призмы, вычислив площадь каждой грани в отдельности.

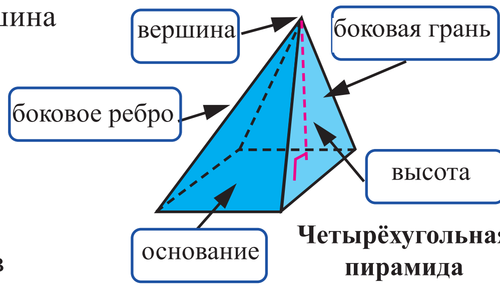
10. Расстояние между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно 4 см, 6 см и 8 см. Площадь боковой поверхности призмы равна 90 см^2. Найдите боковое ребро призмы.

11. Основанием наклонной призмы на рисунке является равносторонний треугольник. Грань $ACC'A'$ прямоугольник. Зная, что $AA' = 10$ см, $AB = 4$ см и $\alpha = 45°$, найдите площадь боковой поверхности призмы.



Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды

Одна грань пирамиды многоугольник, все остальные грани - треугольники. Треугольники с общей вершиной являются боковыми гранями, многоугольник - основанием. Общие стороны боковых граней называются рёбрами. Общая вершина для боковых граней, состоящих из треугольников, называется вершиной пирамиды.

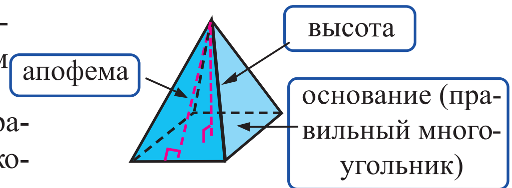


Четырёхугольная пирамида

Перпендикуляр,опущенный из вершины пирамиды на её основание, называется высотой пирамиды.

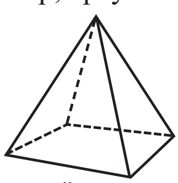
Правильной называется пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и основание высоты пирамиды совпадает с центром этого многоугольника.

Высота, проведённая из вершины правильной пирамиды на основание боковой грани (треугольника), называется апофемой.

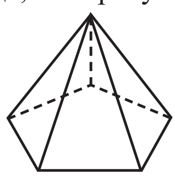


Правильная четырёхугольная пирамида

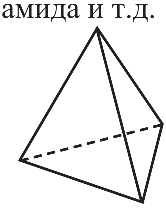
Пирамида называется по форме многоугольника,лежащего в основании. Например, треугольная пирамида, четырёхугольная пирамида и т.д.



Четырёхугольная пирамида



Пятиугольная пирамида



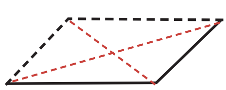
Треугольная пирамида

Боковые рёбра правильной пирамиды конгруэнтны. Боковые грани правильной пирамиды конгруэнтные равнобедренные треугольники.

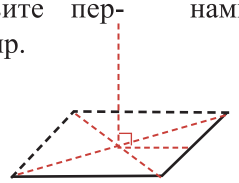
Правильная треугольная пирамида ещё называется тетраэдром. *Tetra* в переводе с греческого четыре, т.е. 4 грани (каждая в форме треугольника).

В частном случае пирамиду можно изобразить следующим образом:

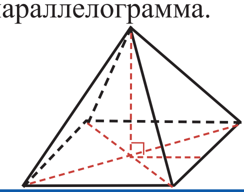
1. Начертите параллелограмм и его диагонали.



2. Из точки пересечения диагоналей восстановите перпендикуляр.

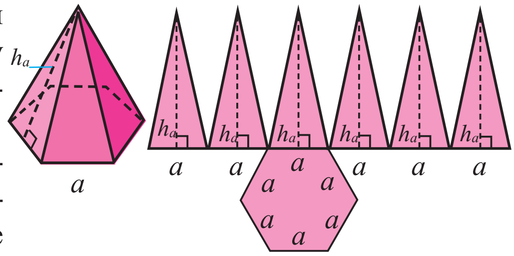


3. Вершину перпендикуляра соедините с вершинами параллелограмма.



Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды.

Боковую поверхность правильной пирамиды можно найти как сумму площадей конгруэнтных треугольников.



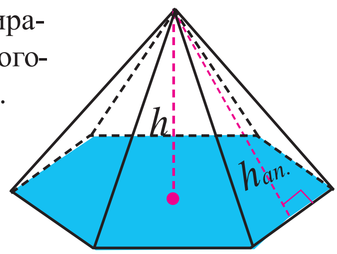
Например, на рисунке площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна сумме площадей 6 конгруэнтных треугольников, из которых состоит боковая поверхность.

$$S = \frac{1}{2}ah_{ап.} + \frac{1}{2}ah_{ап.} + \frac{1}{2}ah_{ап.} + \frac{1}{2}ah_{ап.} + \frac{1}{2}ah_{ап.} + \frac{1}{2}ah_{ап.} =$$

$$= \frac{1}{2}h_{ап.}(a + a + a + a + a + a) = \frac{1}{2}Ph_{ап.}; \qquad S = \frac{1}{2}Ph_{ап.}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна полупроизведению периметра многоугольника,лежащего в основании, и апофемы.



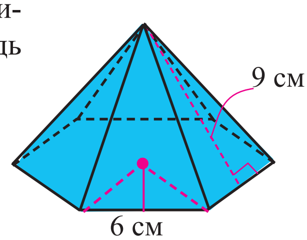
$$\boldsymbol{S_{бок} = \frac{1}{2}Ph_{ап.}}$$

Здесь P периметр основания,

$h_{ап.}$ - апофема пирамиды.

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей основания и боковой поверхности. $\boldsymbol{S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}}$

Пример 1. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6 см. Найдём площадь полной поверхности, если апофема равна 9 см.



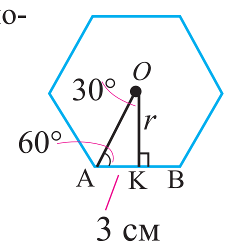
Решение:

Дано: $a = 6$ см, $h_{ап.} = 9$ см

Найдите: $S_{п.п.} = ?$

$S_{бок.} = \frac{1}{2}Ph_{ап.} = \frac{1}{2}6\,a\,h_{ап.} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 162$ (см²)

Чтобы найти площадь основания, сначала надо найти апофему основания (r). $S_{осн.} = \frac{1}{2}Pr$



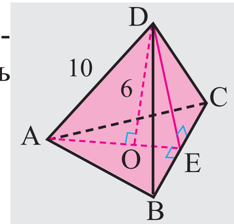
Центральный угол правильного шестиугольника:

$360° : 6 = 60°$

Тогда $\angle AOK = 30°$.

$r = 3\,\mathrm{tg}60° = 3\sqrt{3}$; $S_{от} = \frac{1}{2}\,36 \cdot 3\sqrt{3} \approx 93{,}5$ (см²)

$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.} \approx 162$ см² $+ 93{,}5$ см² $\approx 255{,}5$ (см²)



Пример 2. Боковые рёбра правильной треугольной пирамиды равны 10 см, а высота 6 см. Найдём площадь полной поверхности.

Решение:

Дано: AD = 10 см, DO = 6 см

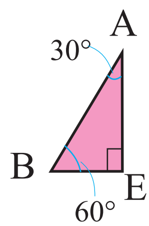
Найдите: $S_{п.п.} = ?$

Чтобы найти боковую поверхность пирамиды, надо найти периметр основания и апофему. Для этого достаточно найти одну сторону правильного треугольника.

Из ΔADO $AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (см)

Известно, что $AO = \frac{2}{3}AE$ (объясните); т.к. $\frac{2}{3}$ AE составляет 8 (см), то AE = 12 см. Так как углы ΔAEB равны 30°, 60°, 90° (объясните).

$BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$; $BC = 2 \cdot BE = 8\sqrt{3}$; $P = 3 \cdot BC = 24\sqrt{3}$



Найдём апофему из ΔDOE. OE = 12 – 8 = 4 (см)

$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$S_{бок} = \frac{1}{2}Ph_{ап.} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}$ (см²)

$S_{осн.} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}$ (см²)

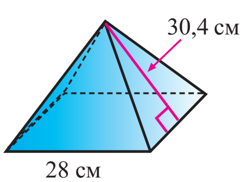
$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 24\sqrt{39} + 48\sqrt{3} \approx 150 + 83 = 233$ (см²)

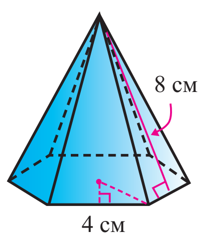
Обучающие задания

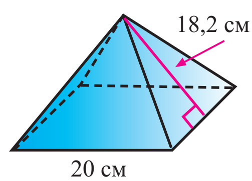
1. Основание пирамиды-прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Найдите высоту пирамиды.

2. Высота правильной четырёхугольной пирамиды 7 см, сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

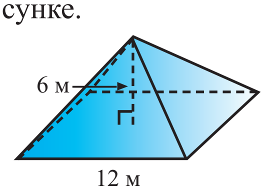
3. Найдите площадь боковой поверхности правильных пирамид на рисунке.

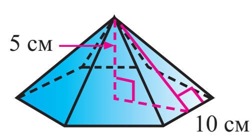


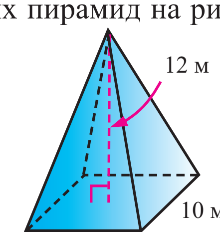




4. Найдите площадь боковой поверхности правильных пирамид на рисунке.



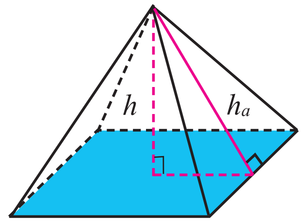




Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды

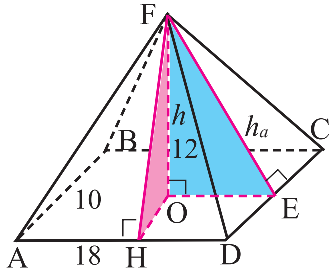
5. Найдите неизвестные размеры правильной четырёхугольной пирамиды по данным таблицы.

Высота	6	12	24	?	?	6
Апофема	10	15	?	13	5	?
Стороны основания	?	?	14	?	8	?
Боковая поверхность	?	?	?	624	?	320

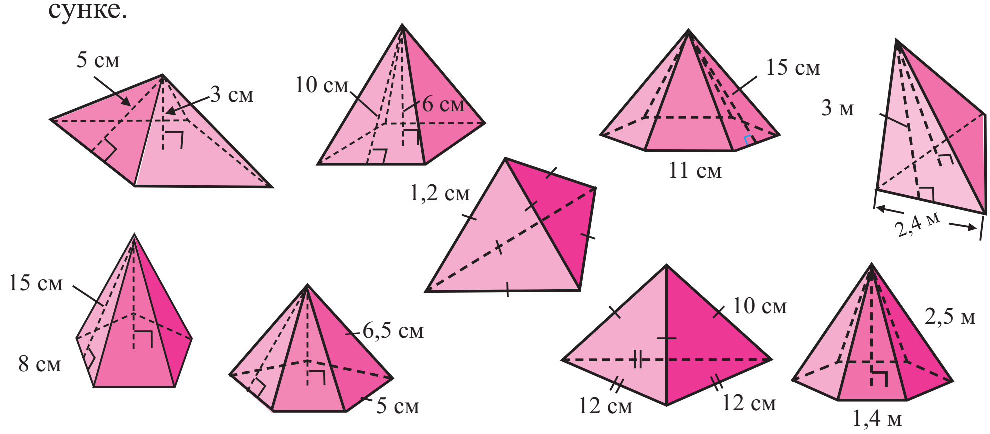


6. Изобразите правильную пирамиду и найдите площадь боковой поверхности.
а) Правильная четырёхугольная пирамида, со стороной основания 8 ед. и боковым ребром 10 ед.
б) Правильная треугольная пирамида, со стороной основания 4 ед. и апофемой 6 ед.
в) Правильная шестиугольная пирамида, со стороной основания 10 ед. и боковым ребром 13 ед.

7. Основания пирамиды-прямоугольник со сторонами 10 ед. и 18 ед. Точка O является центром прямоугольника. Высота пирамиды FO = 12 ед. а) Найдите FH и FE;
б) Найдите боковую поверхность пирамиды. Можно ли применить формулу $S_{бок.} = \frac{1}{2}Ph_{ап.}$?



8. Найдите площадь боковой поверхности правильных пирамид на рисунке.

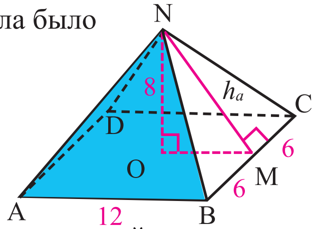


9. Найдите площадь боковой поверхности треугольной пирамиды, боковые рёбра которой попарно перпендикулярны и равны 4 см, 6 см и 8 см.

10. Основания пирамиды-прямоугольник со сторонами 9 см и 5 см. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды

11. Крыша дома имеет форму четырёхугольной пирамиды. Основанием является прямоугольник со сторонами 12 м и 10 м. Каждое боковое ребро равно 10 м. Сколько квадратных метров материала было потрачено на покрытие крыши?



12. Найдите следующие данные для правильной четырёхугольной пирамиды:

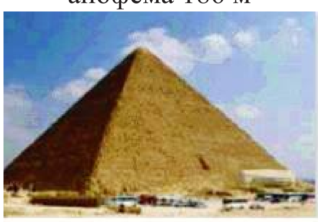
а) OM б) $h_{ап.}$ в) NC

г) $S_{\Delta NBC}$ д) $S_{бок.}$ е) $S_{п.п.}$

13. В архитектуре городов мира важное место занимают постройки, имеющие форму пирамид. Среди них есть как античные памятники(Египетские пирамиды, пирамида Цестия в Риме), так и новые, придающие городам современный вид(Музей Лувра в Париже, вход на станцию метро Ичери Шехер в Баку).

а) Пирамида Хеопса и пирамида в Лувре являются правильными четырёхугольными пирамидами. Найдите площадь боковой поверхности каждой пирамиды.

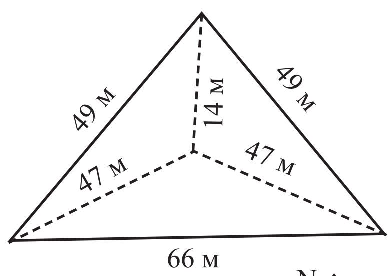
Пирамида Хеопса. Египет
Сторона основания 230 м,
апофема 186 м



Пирамида в Лувре. Париж
Сторона основания 35 м,
апофема 28 м

б) На рисунке представлен план пирамиды на входе в станцию метро Ичери Шехер. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды по данным на плане.

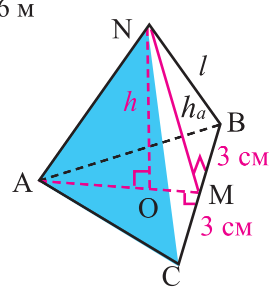
Пирамида на станции метро Ичери Шехер



14. Найдите следующие данные для правильного тетраэдра:

а) OM б) $h_{ап.}$ в) NC

г) $S_{\Delta NBC}$ д) $S_{бок.}$ е) $S_{п.п.}$



Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды

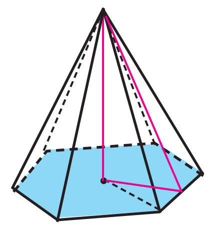
15. а) Обоснуйте утверждение:”Апофема пирамиды не меньше её высоты.”

б) Найдите высоту и апофему правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 10 см и боковым ребром 13 см.

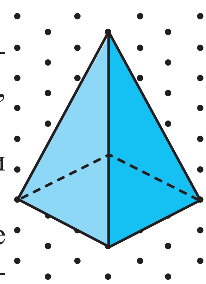
в) Основание пирамиды является ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если боковые грани образуют с плоскостью основания угол 60°.

16. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, в основании которой лежит равнобедренный треугольник со сторонами 6см, 6 см и 8 см, а длина каждого бокового ребра равна 5 см.

17. Площадь одной боковой грани правильной шестиугольной пирамиды $8\sqrt{3}$ ед., а площадь основания $24\sqrt{3}$ кв.ед. Найдите:
а) длину стороны основания;
б) апофему
в) длину бокового ребра;
г) высоту;

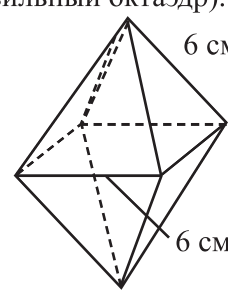


18. **Исследование при помощи правильной четырёхугольной пирамиды.**



а) На изометрической бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду со стороной основания 3 ед., как показано на рисунке.
б) Составьте таблицу для значений боковой поверхности пирамиды, в случае если апофема равна 3; 9.
в) Запишите, как изменится боковая поверхность, если не изменяя длин сторон основания, длину апофемы увеличить в 3 раза.
г) Как изменится площадь боковой поверхности пирамиды, если и сторону основания и апофему увеличить в 3 раза?

19. Вычислите площадь поверхности фигуры на рисунке(правильный октаэдр).



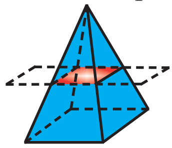
20. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Вычислите площадь боковой и полной поверхности пирамиды, если сторона основания равна 6 см.

21. В основании пирамиды - равнобедренный треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см. Все двугранные углы при основании равны 60°. Найдите высоту и апофему пирамиды.

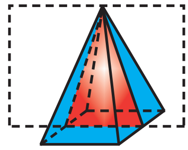
Сечение пирамиды плоскостью. Усечённая пирамида.

1. При сечении правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью получаются различные многоугольники. Исследуйте следующие случаи и представьте результат в виде рисунка или словесно.

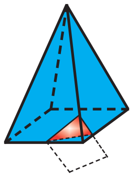
Сечение плоскостью, параллельное основанию.
Сечение - квадрат



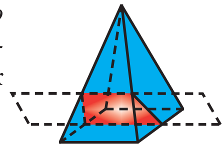
Сечение плоскостью из вершины пирамиды, перпендикулярно основанию.
Сечение - равнобедренный треугольник



Сечение плоскостью через смежные грани,с общей вершиной, под углом к плоскости основания.
Сечение - треугольник

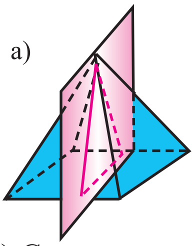


Сечение плоскостью через противолежащие грани, под углом к плоскости основания.
Сечение - трапеция

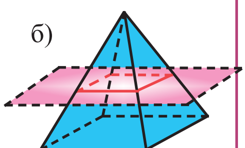


2. Опишите сечение пирамиды плоскостью.

а)

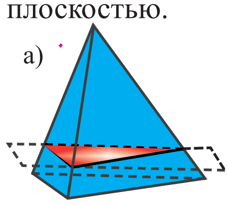


б)

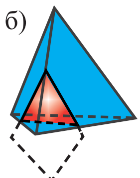


3. Опишите сечение, треугольной пирамиды на рисунке, плоскостью.

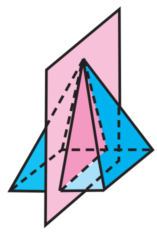
а)



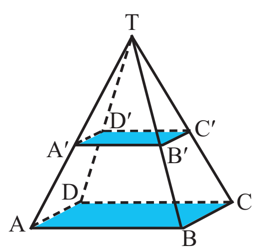
б)



4. а) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 14 см. Длина каждого бокового ребра равна 10 см. Найдите площадь диагонального сечения (проходящего через вершину пирамиды и диагональ основания).
б) Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 ед., а сторона основания равна 8 ед. Найдите площадь сечения плоскостью проходящее через апофем противоположных граней.



5. Докажите справедливость следующих высказываний.Если плоскость сечения параллельна основанию, то:1) плоскость делит боковые рёбра и высоту на пропорциональные части;
2) многоугольник - сечение подобен основанию;
3) площади сечения и основания относятся как квадраты расстояний, начиная от вершины.



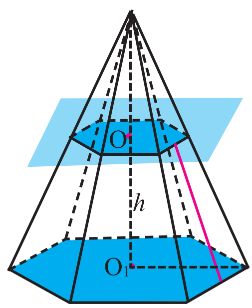
План для доказательства. Используйте подобие треугольников ABT и A′B′T′.

6. Высота пирамиды разделена на 4 равные части, через которые параллельно плоскости основания проведены плоскости. Зная, что площадь основания равна 400 м^2, найдите площади полученных сечений.

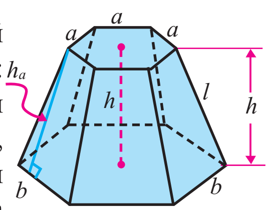
Сечение пирамиды плоскостью. Усечённая пирамида

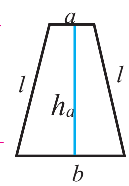
7. Площадь основания пирамиды 512 см^2, а высота 16 см. Найдите расстояние от плоскости сечения, параллельного основанию до плоскости основания, если площадь сечения равна 50 см^2.

Плоскость, параллельная плоскости основания и пересекающая ее боковые ребра, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть представляет собой многогранник, которой называется **усечённой пирамидой**. Параллельные грани усечённой пирамиды называются её основаниями, остальные грани-боковой поверхностью. Отрезок перпендикуляра между плоскостями основания называется высотой усечённой пирамиды. Если пирамида правильная, то сечение плоскостью также является правильным многоугольником и усечённая пирамида также является правильной. Боковые грани правильной усечённой пирамиды конгруэнтные трапеции. Высота этой трапеции являются апофемой правильной усечённой пирамиды.

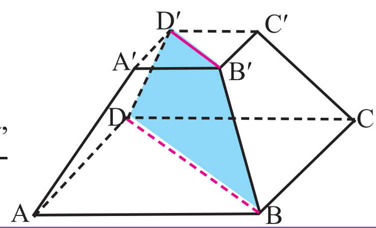


Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды вычисляется по формуле: $S_{бок.} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot h_{ап.}$, здесь P_1 и P_2 периметры оснований правильной усечённой пирамиды, $h_{ап.}$ - апофема. Площадь полной поверхности усечённой пирамиды находится как, сумма площадей верхнего и нижнего оснований и боковой поверхности: $S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{вер.осн.} + S_{ниж.осн.}$



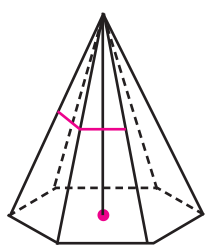


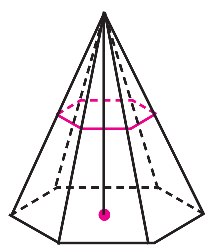
Плоскость, проходящая через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани усечённой пирамиды, называется диагональным сечением.

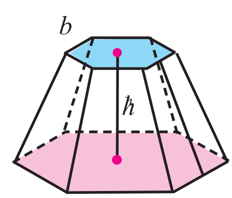


Этапы построения усечённой пирамиды.

1) Постройте многоугольник основания.







2) Из центра многоугольника постройте перпендикуляр определённой длины, и соедините вершины многоугольника с вершиной перпендикуляра.

3) На любом ребре пирамиды выберите точку, постройте отрезки, параллельные сторонам основания, и начертите другое основание. Сотрите боковые рёбра от вершины, до меньшего основания.

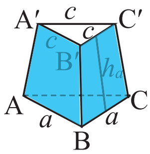
Сечение пирамиды плоскостью. Усечённая пирамида.

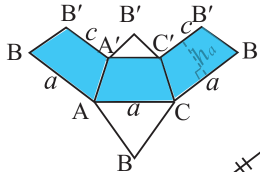
8. а) Изобразите правильную четырёхугольную усечённую пирамиду с высотой 6 см и сторонами основания соответственно 4 см и 6 см.

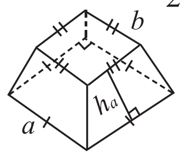
б) Изобразите правильную шестиугольную усечённую пирамиду с высотой 8 см и сторонами основания соответственно 2 см и 3 см.

в) Найдите площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, площади оснований которой 36 см^2 и 64 см^2 и боковые рёбра составляют с плоскостью нижнего основания угол 45°.

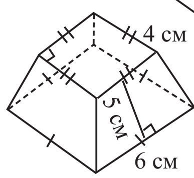
9. По рисунку докажите справедливость формулы, для площади боковой поверхности правильной усечённой пирамиды $S_{бок.}=\dfrac{1}{2}(P_1+P_2)\cdot h_a$.

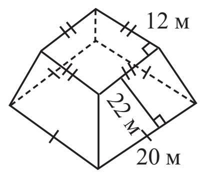






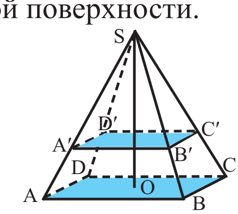
10. Найдите площадь боковой и полной поверхностей правильных усеченных четырёхугольных пирамид.





11. Плоскость, параллельная основанию правильной четырёхугольной пирамиды, проведена через середину высоты. Высота пирамиды 8 см, сторона основания 12 см. Определите размеры полученной усечённой пирамиды, изобразите её и найдите площадь полной поверхности.

12. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды AB равна 12 см, высота SO равна 8 см. На расстоянии 2 см параллельно основанию проведена плоскость. Найдите площадь полной поверхности полученной усеченной пирамиды.



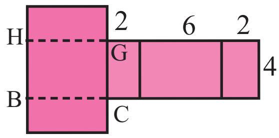
13. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 28 см, а апофема 35 см. Стороны оснований относятся как 5:2. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

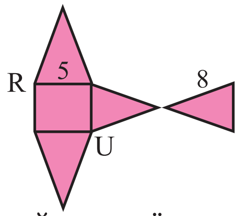
14. Для хранения драгоценностей используется конструкция в виде пирамиды из стеклянных поверхностей, закреплённых металлическими профилями. Правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания которой равна 30 см,а высота 36 см, разделена на части параллельными плоскостями (начиная от вершины через каждые 12 см).

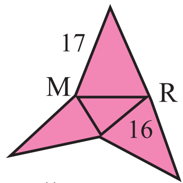
а) Какое наименьшее количество стекла (в кв. см) потребуется для изготовления конструкции. б) Какое наименьшее количество металлических профилей (в см) потребуется для изготовления конструкции?

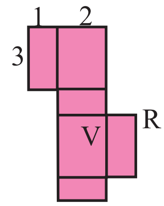
Обобщающие задания

1. Изобразите пирамиду или призму, соответственно данным на развёртках. Назовите остальные вершины и найдите площадь полной поверхности фигур.





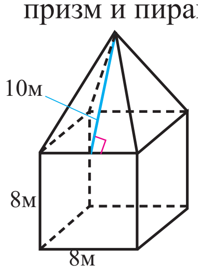


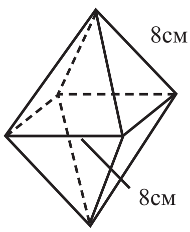


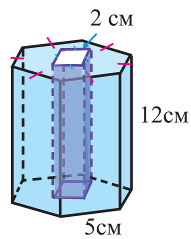
2. Измерениями правильной четырёхугольной пирамиды являются: длины стороны основания, апофемы и высоты, а также площади боковой и полной поверхностей. По следующим данным, найдите остальные измерения пирамиды:

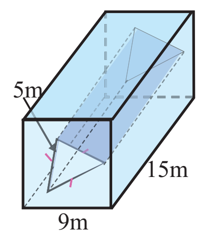
а) a = 3 см, $S_{бок.}$ = 15 см^2 б) h = 12 м, a = 10 м
в) $h_{ап.}$ = 5 м, $S_{бок}$ = 60 м^2 г) $S_{бок.}$ = 80 см^2, $S_{п.п.}$= 144 см^2

3. Найдите площади поверхностей фигур, составленных из правильных призм и пирамид.

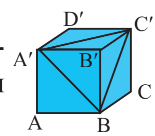




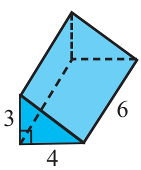


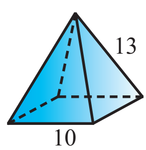


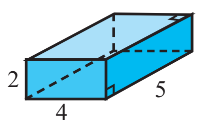
4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, образованной плоскостью, проходящей через вершины A′, B, C′ куба с ребром 6 см.

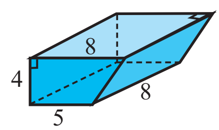


5. Изобразите развёртки прямых призм и правильных пирамид. Найдите площадь полной поверхности.

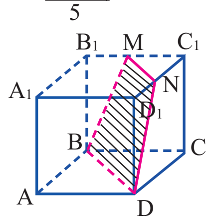








6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагональ основания BD и середины рёбер B_1C_1 и C_1D_1 (точки M и N).



7 Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

Методы решения тригонометрических уравнений

Применение тригонометрических уравнений для решения задач

Тригонометрические неравенства

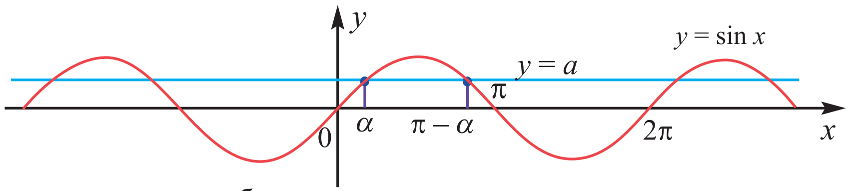
Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ являются простейшими тригонометрическими уравнениями.

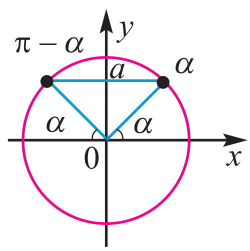
Уравнение $\sin x = a$

Область изменения синуса отрезок $[-1;\ 1]$. Поэтому, при $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений. Рассмотрим случай $|a| \le 1$.

В одной системе координат построим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$.



Как видно, существует бесконечно много точек, в которых прямая $y = a$ пересекает синусоиду. Это говорит о том, что при $|a| \le 1$ уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечно много корней. Так как синус является периодической функцией, то достаточно найти корни на промежутке длиной в один период, т.е. на 2π. По графику видно, что при $|a| < 1$ уравнение $\sin x = a$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ имеет два корня. К тому же выводу можно придти и при движении точки по окружности. На целом периоде, для одного и того же значения синуса, можно найти два угла.



Если один из углов поворота равен α , тогда другой будет $\pi - \alpha$. Остальные решения уравнения $\sin x = a$ ($|a| < 1$) можно получить добавив к ним целое число оборотов. Значит, если α решение уравнения $\sin x = a$, тогда все решения данного уравнения записываются в виде $x = \alpha + 2\pi n$, $x = \pi - \alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$. Эти два семейства решений иногда задаются одной формулой вида $x = (-1)^k\alpha + \pi k$, $(k \in Z)$ и при $k = 2n$ (чётном) получаем решения I семейства, при $k = 2n + 1$ (нечётном) получаем решения II семейства.

При $|a| \le 1$ уравнение $\boldsymbol{\sin x = a}$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ имеет корень $x = \arcsin a$, тогда все решения данного уравнения можно найти по формулам: $x = \arcsin a + 2\pi n$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $(n \in Z)$. Эти формулы можно объединить и записать в виде $\boldsymbol{x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k\ (k \in Z)}$.

Пример 1. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ на отрезке $[0;3\pi]$?

Решение. Запишем решение уравнения $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $(k \in Z)$ и найдём корни, при $k = 0;\ 1;\ 2;3$: $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$, $x_3 = \frac{17\pi}{6}$. При других значениях параметра k корни не принадлежат заданному отрезку.

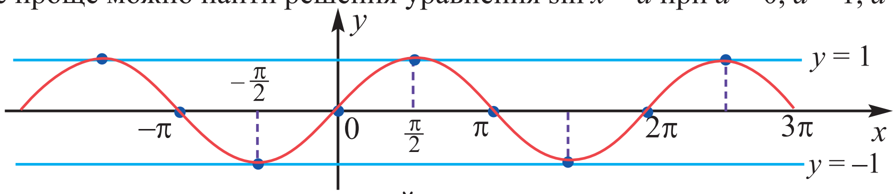
Пример 2. Решим уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

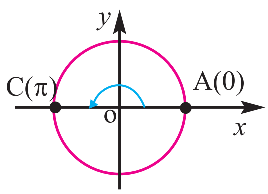
т.к. $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, то $x = (-1)^k \cdot (-\frac{\pi}{4}) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, $(k \in Z)$

Простейшие тригонометрические уравнения

Ещё проще можно найти решения уравнения $\sin x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$.



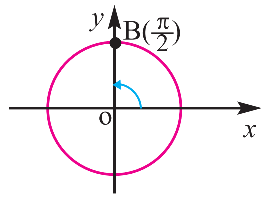
Это можно увидеть и на единичной окружности.



Точки с ординатой 0 A(0) и C(π)

$\sin t = 0$

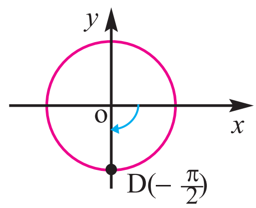
$t = \pi k$ ($k \in Z$)



Точка с ординатой 1 $B(\frac{\pi}{2})$

$\sin t = 1$

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in Z$)



Точка с ординатой –1 $D(-\frac{\pi}{2})$

$\sin t = -1$

$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in Z$)

Пример 3. Решим уравнение $\sin (x + \frac{\pi}{3}) = 1$

Решение. Выполним следующую замену: $x + \frac{\pi}{3} = t$

Получаем уравнение $\sin t = 1$. Решением будет $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in Z$).

Принимая во внимание замену, имеем:

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in Z$)

Отсюда: $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ($k \in Z$)

Пример 4. Решим уравнение $\sin (x - 30^\circ) = 0$.

Решение. Здесь x угол выражен в градусах. Тогда решения уравнения можно записать так: $x - 30^\circ = 180^\circ \cdot k$ $\quad x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k$ ($k \in Z$).

Обучающие задания

1. Какое значение x является корнем заданного уравнения? Используя периодичность функции запишите ещё два корня: положительный и отрицательный. Выполните проверку.

а) $2 \sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ б) $\sqrt{8} \sin x = \sqrt{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

2. Для следующих уравнений: 1) найдите корни, из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; 2)запишите общее решение; 3)представьте решение на графике.

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ б) $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ в) $2 \sin x = -\sqrt{3}$ $\quad$ г) $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$

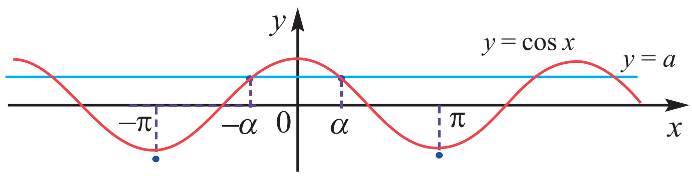
д) $\sin x = 1$ $\quad$ е) $1 + \sin x = 0$ $\quad$ ж) $2 \sin x - 1 = 0$ $\quad$ з) $\sin x = 0$

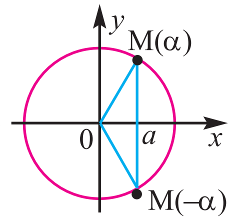
3. Решите уравнения.

а) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ $\quad$ б) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ $\quad$ в) $2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

Уравнение $\cos x = a$

Аналогичным образом, при $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. При $|a| \le 1$ уравнение имеет бесконечное множество корней. Как по графику, так и по единичной окружности видно, что на отрезке, длиной в один период (т.е. 2π) уравнение $\cos x = a$ ($|a| < 1$) имеет два корня.



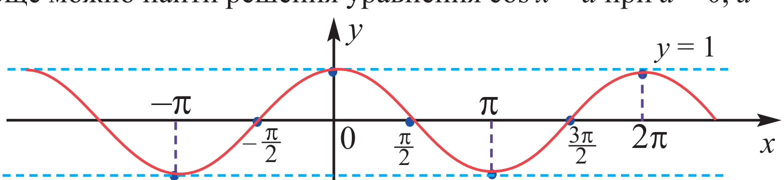


Если α является корнем уравнения $\cos x = a$, тогда $-\alpha$ также является корнем, так как $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Таким образом, если известно,что α является одним из корней уравнения $\cos x = a$, то решения этого уравнения можно найти по формулам $x = \alpha + 2\pi n$ и $x = -\alpha + 2\pi n$ ($n \in Z$). Иногда эти две формулы объединяют и записывают в виде $x = \pm\alpha + 2\pi n$ ($n \in Z$).
При $|a| \le 1$ корень уравнения $\mathbf{\cos x = a}$ на отрезке $[0; \pi]$ равен $x = \arccos a$.
Тогда все корни можно найти по формуле: $\mathbf{x = \pm \arccos a + 2\pi n}$ **(**$n \in Z$**)**

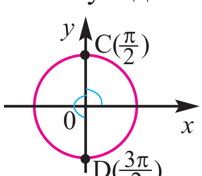
Пример 5. Решим уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Решение: Один из корней уравнения $x = \frac{\pi}{4}$.
Тогда все корни будут $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in Z$).
Решения можно записать так: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in Z$).
Пример 6. Решим уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.
Решение: $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$ ($n \in Z$)

Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, получаем:
$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in Z$)

Ещё проще можно найти решения уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$.



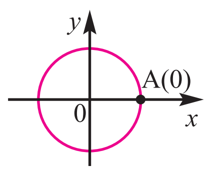
Это можно увидеть по изображению на единичной окружности.



Точки с абсциссами 0 $C(\frac{\pi}{2})$, $D(\frac{3\pi}{2})$

$\mathbf{\cos t = 0}$

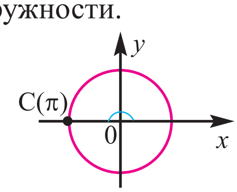
$\mathbf{t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ (n \in Z)}$



Точка с абсциссой 1A(0)

$\mathbf{\cos t = 1}$

$\mathbf{t = 2\pi n,\ (n \in Z)}$



Точка с абсциссой –1 C(π)

$\mathbf{\cos t = -1}$

$\mathbf{t = \pi + 2\pi n,\ (n \in Z)}$

Простейшие тригонометрические уравнения

Пример 7. Решим уравнение $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Выполним замену $x+\frac{\pi}{4}=t$: $\cos t=-1$ $\quad t=\pi+2\pi k\ (k\in Z)$

Принимая во внимание замену, имеем: $x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k\ (k\in Z)$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k$ $\qquad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\ (k\in Z)$

4. Какое значение x является корнем заданного уравнения? Используя периодичность функции запишите ещё два корня: положительный и отрицательный. Выполните проверку.

а) $\cos x+1=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$ $\qquad$ б) $\sqrt{8}\cos x=2,\quad x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{6}$

5. Решите уравнения. Найдите: 1) решения, принадлежащие промежутку $[0;\ 2\pi]$; 2) общее решение; 3) графическое решение.

а) $\cos x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ б) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ в) $2\cos x=\sqrt{2}$ $\qquad$ г) $2\cos 2x=\sqrt{3}$

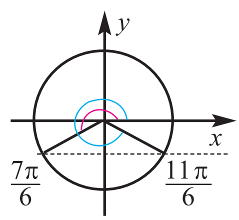
д) $2\cos x-\sqrt{3}=0$ $\qquad$ е) $2\cos x+1=0$ $\qquad$ ж) $\cos x-1=0$ $\qquad$ з) $\cos 2x=0$

6. Изучите пример, запишите решение в тетрадь. Задание 2) выполните самостоятельно.

1) Запишите решения уравнений, принадлежащих промежутку $[0;\ 3\pi]$.

а) $\sin x=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ б) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

Рассмотрим общие решения каждого из двух уравнений вида $\sin\theta=-\frac{1}{2}$. На единичной окружности существуют две точки с ординатами $-\frac{1}{2}$. Этим точкам соответствуют углы $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$. Решение уравнения: $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{11\pi}{6}+2\pi k\ (k\in Z)$



а) В случае, если $\theta=x$ и $0\le x\le 3\pi$, данному интервалу удовлетворяют только значения x равные $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$: $x=\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$

б) В случае, если $\theta=2x$, если x удовлетворяет условию $0\le x\le 3\pi$, то $0\le 2x\le 6\pi$ и на данном интервале существуют следующие решения:

$$\sin 2x=-\frac{1}{2}\qquad 2x=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\ \frac{31\pi}{6},\ \frac{35\pi}{6}$$

$$x=\frac{7\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12},\ \frac{19\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12},\ \frac{31\pi}{12},\ \frac{35\pi}{12}$$

2) Запишите решения уравнений, расположенные на промежутке $[0;\ 3\pi]$.

а) $\cos x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ б) $\cos 2x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ в) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

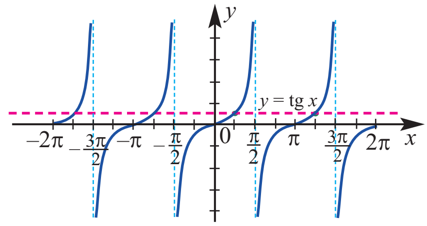
Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения tg $x = a$ и ctg $x = a$

На промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ решением уравнения tg $x = a$ является $x = \text{arctg } a$. Так как основной период функции tg x равен π то, все решения уравнения **tg $x = a$** можно задать формулой:

$$\boldsymbol{x = \text{arctg } a + \pi n, (n \in Z)}.$$

То, что решение верно показано на рисунке, при помощи точек пересечения графиков функций $y = \text{tg } x$ и $y = a$.



Аналогично можно показать, что все решения уравнения ctg $x = a$ имеют вид **$x = \text{arcctg } a + \pi n \; (n \in Z)$** .

Пример 8. Решим уравнение tg $(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.

Решение: Выполним замену $x - \frac{\pi}{6} = t$

Получим уравнение tg $t = \sqrt{3}$. Решение этого уравнения будет

$t = \frac{\pi}{3} + \pi n \; (n \in Z)$.

Принимая во внимание замену получим:

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi n \; (n \in Z)$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \; (n \in Z)$

Пример 9. Решим уравнение ctg $3x = -1$.

Решение: Выполнив замену $3x = t$, получим: ctg $t = -1$

Так как $\text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то $t = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

Из замены следует, что $3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. Разделив обе части на 3 получим все решения уравнения ctg $3x = -1$ в виде $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, (n \in Z)$.

Пример 10. Решим уравнение tg $x = 0{,}75$.

Для решения уравнения такого типа используйте калькулятор.

Если после нажатия кнопки $\tan^{-1}$ ввести число 0,75, то при нажатой кнопке Degree получим значение 36,87°. Так как тангенс является периодической функцией, то значения 36,87° + 180°, 36,87° –180°, 36,87° + 360°, 36,87° – 360°, 36,87° + 540°, 36,87° – 540° также соответствуют значениям тангенса равным 0,75. Таким образом, решение уравнения в общем виде записывается так: $x = 36{,}87° + 180°k$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots)$.

Решение уравнения при помощи кнопки Radian будет иметь вид:

$A = 0{,}6435 + \pi k, \; k \in Z$.

Простейшие тригонометрические уравнения

Решения уравнений вида $\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ можно получить при помощи равенств:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Пример 11. Решим уравнение $\operatorname{cosec}\ x + 1 = 0$ $x \in [0; 2\pi]$.

Решение. $\operatorname{cosec} x = -1$

$\frac{1}{\sin x} = -1$ Общее решения уравнения $\sin x = -1$ есть $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.

$x = \frac{3\pi}{2}$ - решения уравнения $\sin x = -1$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

7. Какое значение x является корнем заданного уравнения? Используя периодичность функции запишите ещё два корня: положительный и отрицательный. Выполните проверку.

а) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ б) $\sqrt{6}\operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

8. Решите уравнения. Найдите: 1) решения, принадлежащие промежутку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; 2) общее решение.

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ б) $\operatorname{tg} x = -1$ в) $\operatorname{tg} x = 1$ г) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Решите уравнения. Найдите: 1) решения, принадлежащие промежутку $(0; \pi)$; 2) общее решение.

а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ б) $\operatorname{ctg} x = -1$ в) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ г) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Используя полученные результаты, запишите общие решения следующих уравнений.

а) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ б) $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$ в) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. Решите уравнения.

1) Найдите решения, расположенные на промежутке $[0; 2\pi]$.
2) Найдите общее решение.
3) Изобразите графическое решение уравнения.

а) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ б) $2\cos x = 1$ в) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$

г) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ д) $\sin x = 0$ е) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

12. При помощи калькулятора решите уравнения и найдите три его корня.

а) $\operatorname{tg}\theta = 3$ б) $\sin\theta = 0,85$ в) $\cos\theta = 0,47$

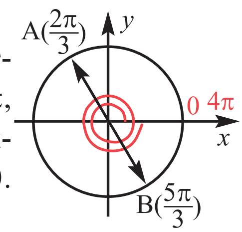
Простейшие тригонометрические уравнения

13. Найдите корни уравнения, принадлежащие интервалу $0 \le x \le 4\pi$, по образцу.

а) $2\text{tg}\, x = -2$ б) $2\sin x = -1$ в) $2\cos x = -\sqrt{3}$

Пример. $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

Решение: На единичной окружности точкам $-\sqrt{3}$ соответствуют два угла поворота: $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Так как период равен π, то значения $-\sqrt{3}$ тангенс принимает в точках равноудаленных друг от друга на расстояние π, то есть $\text{tg}(\pi + \theta) = \text{tg}\, \theta$.

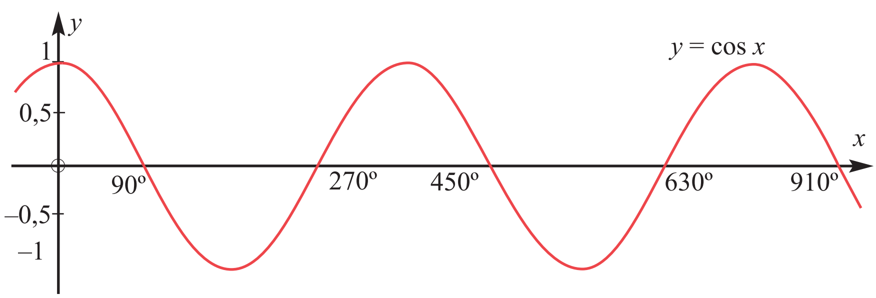


Значит решения уравнения $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$ на интервале $0 \le x \le 4\pi$, можно найти по правилу.

$$\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\pi} \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{\pi} \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3} \xrightarrow{\pi} \frac{8\pi}{3} + \pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$0 \longleftarrow 0 \le x \le 4\pi \longrightarrow 4\pi$$

14. Найдите приближённые решения следующих уравнений на заданном промежутке, при помощи графика функции $y = \cos x$.



а) $\cos x = 0{,}4$ $0 \le x \le 450°$ б) $\cos x = -0{,}5$ $0 \le x \le 630°$

в) $\cos x + 1 = 1$ $0 \le x \le 910°$ г) $2\cos x = -2$ $0 \le x \le 630°$

15. Решите уравнения.

а) $2\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ б) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ в) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

г) $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ д) $\text{tg}(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$ е) $\text{ctg}(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$

16. Решите уравнения.

а) $\sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

в) $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ г) $\sin x \cdot \cos x = 0$

Простейшие тригонометрические уравнения

17. Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку, по образцу.

а) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$

б) $\cos^2(x + 30^\circ) - \sin^2(x + 30^\circ) = -1$, $(180^\circ; 270^\circ)$

в) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$, $[-\pi; 2\pi]$

Пример: а) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$

Решение: Запишем уравнение в виде $\cos 2x = 1$.

Общее решение уравнения $\cos\theta = 1$ имеет вид: $\theta = 2\pi k$, $(k \in Z)$.

Отсюда получаем: $2x = 2\pi k$, $x = \pi k$, $(k \in Z)$

Если $0 < x \leq 3\pi$ по условию , тогда $0 < \pi k \leq 3\pi$.

Разделим каждую сторону на π : $0 < k \leq 3$, $(k \in Z)$.

Подставим полученные значения $k = 1; 2;3$ в формулу $x = \pi k$ $(k \in Z)$

получим корни заданного уравнения: π; 2π; 3π.

18. Найдите нули функции на заданном промежутке.

а) $y = \sin 2x$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ б) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $0 \leq x \leq 3\pi$

19. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$y = 3\cos(x + \frac{\pi}{3})$ и $y = 1{,}5$.

20. Решите уравнения.

а) $\sin(\pi + x) = -1$ б) $\cos(\pi - x) = 1$ в) $\sin \pi x = 0$

г) $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = 0$ д) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = 1$ е) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sqrt{3}$

21. Решите следующие уравнения на заданном промежутке.

а) $4\operatorname{tg} 3x + 5 = 1$, $0 \leq x \leq \pi$

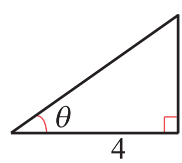
б) $2\cos 2x + 3 = 2$, $0 \leq x \leq 360^\circ$

в) $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$

г) $\sqrt{2}\sin 2x + 3 = 2$, $0 \leq x \leq 360^\circ$

22. Сколько решений имеет уравнение $\frac{\sin \pi x}{x - 1} = 0$ на отрезке $[0;2\pi]$?

23. Найдите периметр треугольника, зная, что $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$.



Методы решения тригонометрических уравнений

Решение любого тригонометрического уравнения сводится к решению простейших тригонометрических уравнений. Рассмотрим основные методы решения тригонометрических уравнений на следующих примерах.

1) Метод разложения на множители

Пример. Решим уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

Решение:

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$ *по формуле двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$*

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ *вынесение общего множителя за скобку*

$\sin x = 0$ или $2\cos x - 1 = 0$ *по условию равенства “0” произведения*

$x = \pi n,\ n \in Z$ | $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z,\ n \in Z$

Обратите внимание, что в различных семействах решений параметры (n, k) отмечаются разными буквами.

Пример. Решим уравнение $\sin x \cos^2 x = 4\sin x$ и найдём корни, расположенные на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение: $\sin x\cos^2 x = 4\sin x$ *заданное уравнение*

$\sin x\cos^2 x - 4\sin x = 0$ *отнимем от каждой части 4 sin x*

$\sin x(\cos^2 x - 4) = 0$ *вынесем sin x за скобку*

$\sin x(\cos x - 2)(\cos x + 2) = 0$ *разложим формуле разности квадратов*

Каждый множитель приравниваем к нулю и находим x (если это возможно).

$\sin x = 0$	$\cos x - 2 = 0$	$\cos x + 2 = 0$
$x = \pi k,\ k \in Z$	$\cos x = 2$	$\cos x = -2$
	решений нет	решений нет

Решение уравнения в общем виде: $x = \pi k,\ (k \in Z)$.

Корни уравнения, расположенные на отрезке [0; 2π]: $x_1 = 0;\ x_2 = \pi;\ x_3 = 2\pi$.

2) Метод введения новой переменной

Пример. $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0$ *из основного тригонометрического тождества $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$*

$-2\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ *упрощаем*

$2a^2 + a - 3 = 0$ *введём новую переменную $\cos x = a$*

$(2a + 3)(a - 1) = 0$

$a = -1{,}5$ | $a = 1$ *решения квадратного уравнения*

$\cos x = -1{,}5$ | $\cos x = 1$ *выполняем обратную замену $\cos x = a$*

корней нет | $x = 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = 2\pi k,\ (k \in Z)$.

3) Решение однородных уравнений

Если $\sin x = a$, $\cos x = b$ и все члены входящие в уравнению являются одночленами одинаковой степени относительно a и b, то такие уравнения называются однородными.

Примеры. $2\sin x - \cos x = 0$

$\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$

Если нет общего множителя, то обе части однородного уравнения можно разделить на большую степень $\cos x$.

Пример. $\sin x + \cos x = 0$

Здесь $\cos x \neq 0$, так как если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, а это противоречит тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит $\cos x \neq 0$.

Обе стороны уравнения можно разделить на $\cos x$:

$\operatorname{tg} x + 1 = 0$

Здесь $\operatorname{tg} x = -1$, $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

4) Применение формулы понижения степени.

Решение. Решим уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{4}$.

Здесь удобно применить формулу понижения степени ($\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$)

$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$ *умножим обе части уравнения на 2*

$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$ *отнимем от обеих частей 1*

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ *сделаем замену $2x = t$*

$\cos t = -\frac{1}{2}$

$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ *так как* $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ *разделим обе части уравнения на 2*

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

5) Метод введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a\sin x \pm b\cos x = d$ (при $ab \neq 0$) удобно решить введя вспомогательный угол разделив обе части уравнения на число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Разделим обе части уравнения на 2:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot \cos x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

введём вспомогательный угол $\frac{\pi}{6}$

$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *по формуле сложения*

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *выполним замену $t = x - \frac{\pi}{6}$*

$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x = 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = \sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$?

Решение: $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$ *по формуле двойного угла*

$1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$ *выполним замену* $\sin\frac{x}{2} = a$

$2a^2 + a - 1 = 0$

$a = -1$ и $a = \frac{1}{2}$ *решение квадратного уравнения*

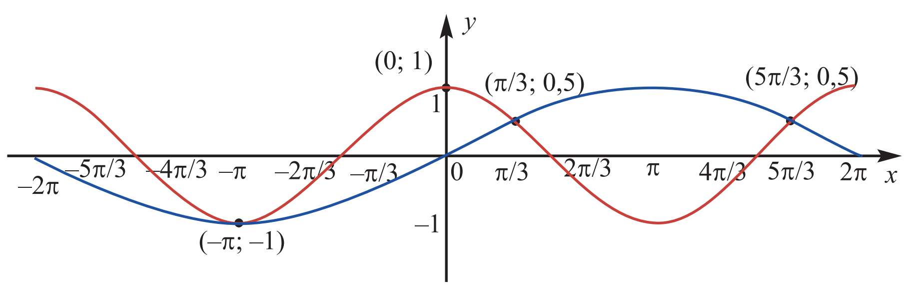
$\sin\frac{x}{2} = -1$ | $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ | $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = -\pi + 4\pi n,\ n \in Z$ | $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$ и $x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z.$

Для параметра n ни одно из значений найденных корней не содержится в заданном отрезке.

$\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$ корни уравнения на отрезке $[0; 2\pi]$ при $k = 0$.
Для заданного параметра k на заданном отрезке не существует других корней. Ответ: два корня.
Убедится в правильности решения можно построив графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin\frac{x}{2}$ при помощи граф калькулятора. Точки пересечения графиков будут являться решением. Для этого выполним построение с помощью ресурса, по адресу в интернете https://www.desmos.com/calculator.



Методы решения тригонометрических уравнений

Обучающие задания

1. Какое из следующих значений x является решением уравнения?

1) $2 \cos x - 1 = 0$

а) $x = \frac{\pi}{3}$ б) $x = \frac{5\pi}{3}$

2) $\operatorname{cosec} x - 2 = 0$

а) $x = \frac{\pi}{6}$ б) $x = \frac{5\pi}{6}$

3) $3 \operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0$

а) $x = \frac{\pi}{12}$ б) $x = \frac{5\pi}{12}$

4) $2 \cos^2 4x - 1 = 0$

а) $x = \frac{\pi}{16}$ б) $x = \frac{3\pi}{16}$

5) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

а) $x = \frac{\pi}{2}$ б) $x = \frac{7\pi}{6}$

6) $\sec^4 x - 4 \sec^2 x = 0$

а) $x = \frac{2\pi}{3}$ б) $x = \frac{5\pi}{3}$

2. Решите уравнения методом разложения на множители.

а) $2 \sin^2 x - \sin x = 0$ б) $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$

в) $\cos^2 x - 3 \cos x = 0$ г) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

3. Решите уравнения методом введения новой переменной.

а) $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$ б) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

в) $\cos^2 x - 4 \cos x - 5 = 0$ г) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

д) $2 \sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ е) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

ж) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$ з) $\operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$

4. Решите однородные уравнения.

а) $\sin x + \cos x = 0$ б) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ в) $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0$

5. Решите уравнение при помощи формулы понижения степени.

а) $4 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 = 0$ б) $4 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$

6. Найдите решение следующих уравнений на заданных промежутках.

а) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, $0 \le x \le 360^\circ$ б) $6 \sin^2 x + 5 = 8$, $0 \le x \le 2\pi$

в) $4 \cos^2 x - 1 = 2$, $0 \le x \le 2\pi$ г) $2 \cos 2x + 3 = 2$ $0 \le x \le 360^\circ$

7. Решите уравнения различными методами.

а) $\cos 3x - \cos x = 0$ б) $\sin 3x + \sin x = 0$

в) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ г) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

д) $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x = 0$ е) $\sin 2x = 2 \cos^2 x$

ж) $(1 + \operatorname{tg} x)\cdot\cos x = 0$ з) $(1 - \operatorname{tg} x)\cdot\sin 2x = 0$

и) $\sin x + 1{,}5 \sin 2x = \sin^3 x$ к) $\cos x + \sin 2x = \cos^3 x$

л) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ м) $\sin 3x = 3 \sin x$

н) $\sin 3x - 2 \cos 2x = 3$ о) $\cos 4x + \sin x = 2$

8. При помощи калькулятора найдите приближённые решения уравнений, расположенных на интервале $0 \le x < 2\pi$.

а) $3\ \mathrm{tg}\, x + 1 = 13$ б) $8 \cos x + 3 = 4$

в) $4 \sin x = -2 \sin x - 5$ г) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

9. Запишите решение следующих уравнений в общем виде.

1) $(\mathrm{ctg}\, x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$
2) $2 \sin x - 1 = \mathrm{cosec}\, x$
3) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x = 0$
4) $\mathrm{cosec}^2 x - 2\ \mathrm{ctg}\, x = 0$
5) $2\ \mathrm{tg}^2 x \sin x - \mathrm{tg}^2 x = 0$
6) $\sec^2 x\ \mathrm{tg}\, x = 2\ \mathrm{tg}\, x$
7) $9 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$
8) $(\mathrm{tg}\, x - 1)(\cos x - 1) = 0$
9) $\mathrm{tg}\, x + 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\, x$
10) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$
11) $\sin^2 x \cos x = \cos x$
12) $\sin^2 x \cos^2 x = 0$
13) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
14) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

10. 1) Для уравнения $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ найдите: а) наименьший положительный корень; б) наибольший отрицательный корень; в) корни расположенные на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

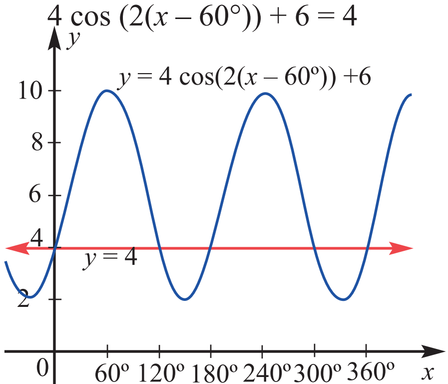
2) корни уравнения $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$, расположенные на промежутке $(-\pi; \frac{\pi}{2})$.

11. Постройте графики следующих функций. Запишите точки пересечения графиков с осью x на интервале $0 \le x < 2\pi$.

а) $y = 2 \sin x + 1$ б) $y = 2 \cos x - 1$

12. По графику на рисунке запишите (приближённые) решения уравнения

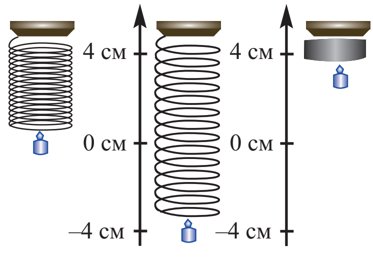
$4 \cos (2(x - 60°)) + 6 = 4$



13. **Сила тока.** Сила тока, который вырабатывает генератор, выражается формулой $I = 20 \sin 80\pi t$ Здесь t -время(в сек), I - сила тока(в амперах). Найдите наименьшее положительное значение t, чтобы:

а) $I = -10\ A$; б) $I = 20\ A$.

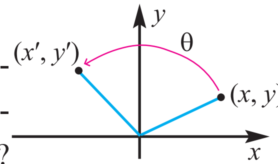
14. Движение тела, подвешенного на пружине можно смоделировать функцией, заданной формулой $d = 4 \sin \pi t$. На какой секунде тело изменит положение на 2 см?



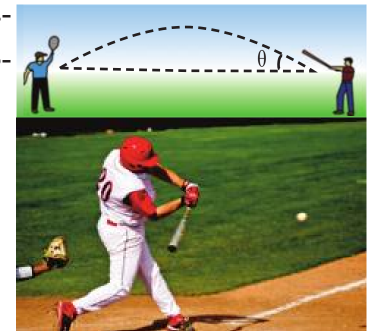
Решение задач при помощи тригонометрических уравнений

15. а) Точка с координатами $(\sqrt{3};1)$ совершает поворот на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки относительно начала координат. В какую точку она преобразуется ?

б) Точка с координатами (2;2) при повороте относительно начала координат преобразуется в точку с координатами $(-\sqrt{2};\ \sqrt{6})$. На какой угол повернулась точка?



16. Расстояние d, которое преодолевает бейсбольный мяч при ударе, зависит от начальной скорости v_0 и угла наклона θ и находится по формуле $d=\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$, здесь g ускорение свободного падения. Если противник находится на расстоянии 70 м, а начальная скорость бейсбольного мяча $v_0 = 30$ м/сек , то найдите угол наклона θ.

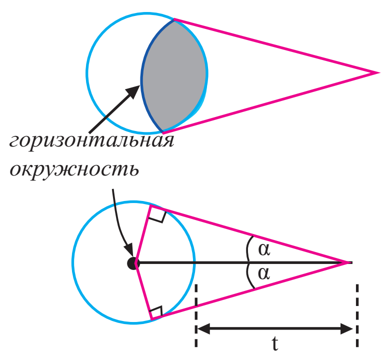


17. Махир хочет проверить балансировку колёс велосипеда. Для этого он ставит метку на ободе колеса и начинает его крутить. Движение метки задаётся формулой $h(t) = 42 + 18 \sin 3\pi t$. Здесь h - высота(см), t - время (сек.).

а) На какой высоте окажется метка через время $t = 15$ сек?

б) За сколько секунд метка окажется на высоте 60 см?

18. **Космос.** Орбита, предназначенного для коммуникационных целей искусственного спутника Земли, находится на расстоянии t миль от земли. Радиус Земли равен 3960 миль. Со спутника можно увидеть только некоторую часть поверхности Земли. На рисунке, горизонтальная окружность ограничивает эту часть и окрашена чёрным цветом. Чтобы определить некоторые размеры горизонтальной окружности воспользуемся рисунком.



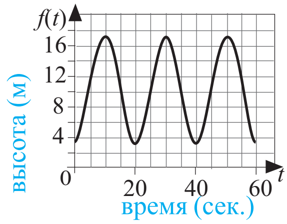
а) Запишите формулу зависимости t от α. б) Найдите t, если α = 10°.

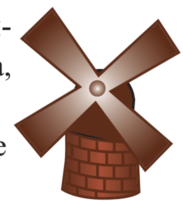
в) Если $t = 30000$ миль, найдите значение α.

Найдите длину минорной дуги АВ. Какое наименьшее количество таких спутников необходимо, чтобы увидеть целиком линию вдоль экватора?

Решение задач при помощи тригонометрических уравнений

19. Литература. Главный герой романа испанского писателя Мигеля де Сервантеса Дон Кихот считал себя очень сильным и, однажды, решил остановить ветряную мельницу. Но он не смог сделать это, так как зацепился за крыло мельницы и стал крутиться на воздухе. Положение, в которое попал Дон Кихот, можно смоделировать при помощи тригонометрической функции. График на рисунке показывает зависимость высоты, на которой находится Дон Кихот при вращении крыла, от времени.





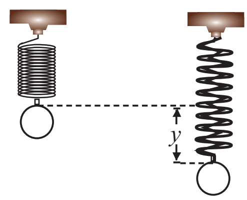
1) По графику найдите следующие показатели и объясните их в реальной ситуации: а) амплитуду; б) период.

2) Запишите формулу функции. Запишите область определения и множество значений для шести полных периодов функции, показывающей положение Дон Кихота в воздухе.

3) В какие минуты Дон Кихот будет находится на высоте 10 м от земли?

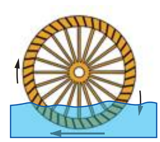
4) Как изменится график при уменьшение скорости вращения крыла?

20. Гармонические колебания. Зависимость отклонения пружины от состояния покоя под действием веса тела задана формулой $y = \dfrac{1}{12}(\sin\pi t\ - 3\cos\pi t)$. Здесь t-время в сек., y - изменение положения в м. Найдите время, из интервала $0 \leq t \leq 1$, за которое тело возвращается в состояние равновесия.



21. Водяное колесо используется для преобразования энергию движения воды в полезную энергию. Для проверки баланса колеса в него вбивают гвоздь и начинают крутить. Когда гвоздь находится на самой высокой точке колеса (в начале движения), то расстояние от него до поверхности воды составляет 3,5 м. Через 12 секунд гвоздь уже опускается к самой низкой точке, на расстоянии 0,5 м под водой.

а) Запишите формулу функции зависимости высоты h, на которой находится гвоздь, от времени.



б) На какой высоте окажется гвоздь через 15 секунд после начала движения?

в) Через сколько времени, после начала движения колесо окажется на высоте 1,5 м от поверхности воды?

Тригонометрические неравенства

Для решение простейших тригонометрических неравенств можно использовать как единичную окружность, так и графики тригонометрических функций.

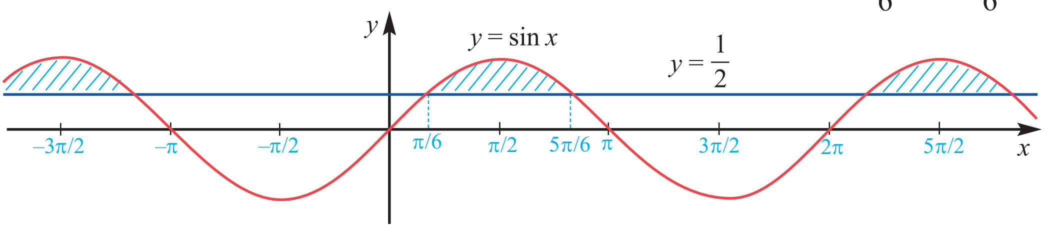
Пример 1. Решим неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ на интервале $0<x<2\pi$ графически

Решение: Запишем решение в общем виде.

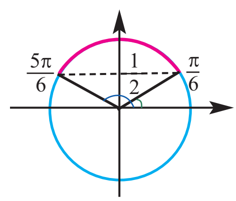
Решить данное неравенство значит, найти абсциссы множества точек графика функции $y = \sin x$, ординаты которых больше $\frac{1}{2}$.

1. Построим график функции $y = \sin x$.
2. В одной системе координат построим график функции $y = \frac{1}{2}$.
3. Отметим точки пересечения графиков.
4. Как видно, прямая $y = \frac{1}{2}$ делит график функции $y = \sin x$ на две части.

Абсциссы множества точек расположенные в верхней части от прямой $y = \frac{1}{2}$ удовлетворяют неравенству. На интервале $0 < x < 2\pi$ эти точки имеют абсциссы $x > \frac{\pi}{6}$ и $x < \frac{5\pi}{6}$. Значит, решением неравенства на интервале $0 < x < 2\pi$ является множество точек, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$



Также решения тригонометрических неравенств можно ясно увидеть на единичной окружности. Все остальные интервалы, удовлетворяющие решению неравенства получаются смещением интервала $(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6})$ на расстояние длиной в 2π влево или вправо. Поэтому решения неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ записываются так:



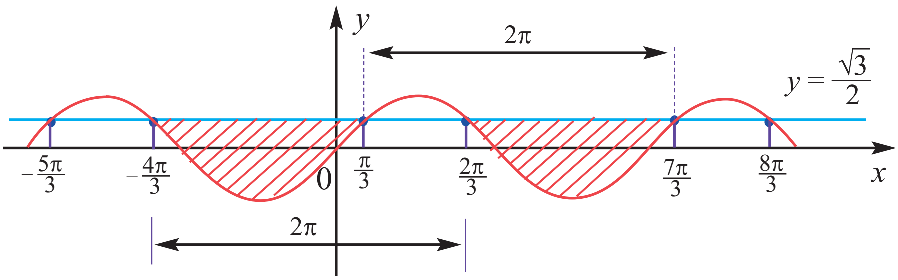
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ (n \in Z) \quad .$$

Пример 2. Решим неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. Решения уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ являются абсциссами точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Если один из корней, на промежутке длиной 2π равен $x_1 = \frac{\pi}{3}$, то другой корень будет равен $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
На графике отметим точки пересечения с абсциссами $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$.

От каждой из них, по обе стороны, отметим ещё две точки - вправо от точки $\frac{\pi}{3}$ на 2π: $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$,и влево от точки $\frac{2\pi}{3}$ на 2π : $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$

Они также являются абсциссами точек пересечения графиков.



На промежутке $\left(-\frac{4\pi}{3}\ \ \frac{\pi}{3}\right)$ ординаты точек графика функции $y = \sin x$ меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Приняв во внимание период функции, решения неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать в виде: $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n\ (n \in Z)$.

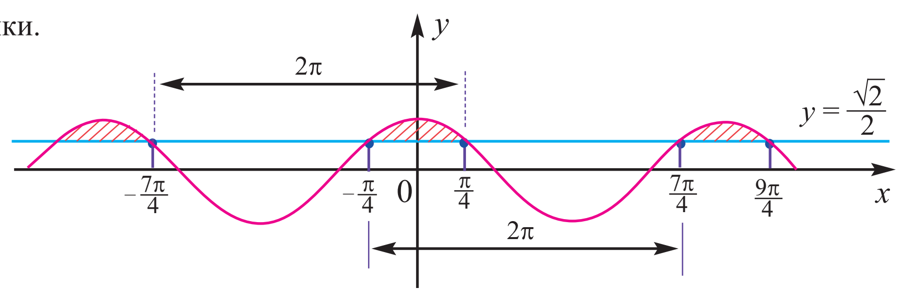
Из графика видно, что интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ удовлетворяет решению неравенства $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Все остальные интервалы, удовлетворяющие неравенству $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаются смещением интервала $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ влево и вправо на отрезок длиной в 2π. Значит,в общем виде решения неравенства $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ записываются так: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\ (n \in Z)$.

Пример 3. Решим неравенство $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ из уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Получим:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n.\ (n \in Z)$$

При $n = 0$ абсциссы точек пересечения будут равны $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$. Отметим эти точки на графике. От каждой из них, по обе стороны, отметим ещё две точки.



Отметим от точки $-\frac{\pi}{4}$ справа на расстоянии 2π точку $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$ и от точки $\frac{\pi}{4}$ слева на расстоянии 2π точку $\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$.

Один из промежутков, удовлетворяющих неравенству, расположен между наименьших по абсолютному значению корней соответствующего уравнения, т.е.между точками $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Приняв во внимание периодичность функции, получим следующие решения неравенства $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$:

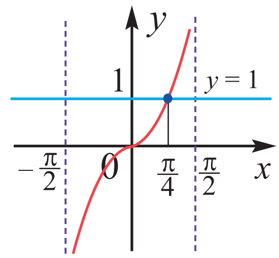
$-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n\ (n\in Z).$

По графику решение неравенства $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ будет:

$\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi n\ (n\in Z).$

Пример 4. Решим неравенства $\operatorname{tg} x>1$ и $\operatorname{tg} x<1$.

Решение: В одной системе координат построим графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=1$.



Найдём абсциссу точки пересечения , расположенной в интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$,решив уравнение $\operatorname{tg} x$: $x=\frac{\pi}{4}$.

Функция $\operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{tg} x=1$ при $x=\frac{\pi}{4}$.

Тогда, если $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} x<1$.

Если $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x>1$.

Так как функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π, то решение неравенства $\operatorname{tg} x<1$ будет

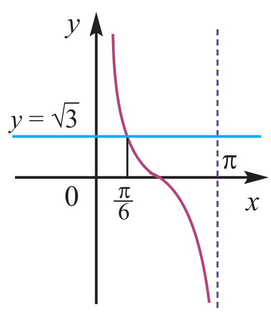
$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n\ (n\in Z),$

а решение неравенства $\operatorname{tg} x>1$ будет

$\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n\ (n\in Z).$

Пример 5. Решим неравенства $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$.

Решение: На одной координатной плоскости построим графики функций $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\sqrt{3}$.



Абсциссу точки пересечения графиков на промежутке $(0;\pi)$ найдём из уравнения $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$: $x=\frac{\pi}{6}$

Функция $\operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0;\pi)$ и при $x=\frac{\pi}{6}$ $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$. Тогда,

если $0<x<\frac{\pi}{6}$,то $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$, а

если $\frac{\pi}{6}<x<\pi$, то $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$.

Это говорит о том , что условию неравенства $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$ удовлетворяют

$0+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n\ (n\in Z)$, а условию неравенства $\operatorname{ctg} x<\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\pi+\pi n\ (n\in Z).$

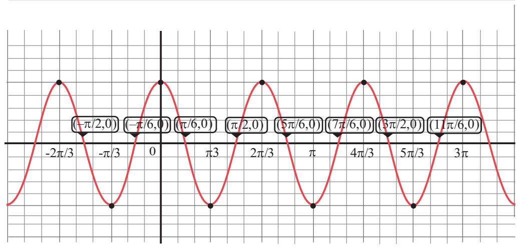
Тригонометрические неравенства

Для решения тригонометрических неравенств:
1) В одной системе координат постройте графики функций из левой и правой частей неравенства;
2) Решите соответствующие уравнения. Найдите абсциссы для нескольких точек пересечения, расположенных близко к началу координат и отметьте их на графике;
3) Определите какой-либо интервал, удовлетворяющий неравенству;
4) Принимая во внимание периодичность функции, запишите все решения.

Пример 6. Решите неравенство $\cos 3x \le 0$ на интервале $0 < x < 2\pi$.

Решение:

1. Построим график функции $y = \cos 3x$.



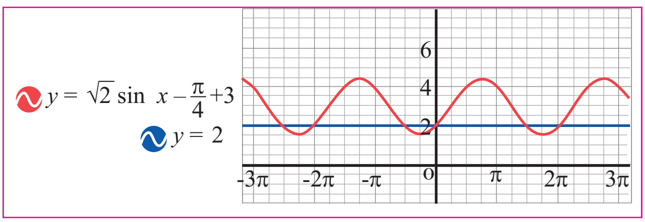
Как видно из графика, значения $\cos 3x$ меньше 0 или равные 0 соответствуют точкам, расположенным на оси абсцисс (прямой $y = 0$) или ниже её.

Решениями неравенства из интервала $0 < x < 2\pi$ являются промежутки

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6} \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

Пример 7. Решим неравенство $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \ge 2$ на интервале $0 < x < 2\pi$.

1. Построим графики функций $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$ и $y = 2$ при помощи графкалькулятора.



Решением неравенства являются абсциссы всех точек, которые расположены на прямой $y = 2$ и выше неё. Это точки $0 < x \le \frac{3\pi}{2}$ из интервала $0 < x < 2\pi$. А общее решение неравенства имеет вид $2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

Проверка: На интервале решения для проверки выберем одну точку, например $x = \frac{\pi}{2}$ и проверим правильность решения:

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \ge 2$

$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 3 \ge 2$

$1 + 3 \ge 2$

Тригонометрические неравенства

Обучающие задания

1. Найдите решения следующих неравенств на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

а) $\sin x > \frac{1}{2}$ б) $\sin x > -\frac{1}{2}$ в) $\sin x > 0$

2. Найдите решения следующих неравенств на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

а) $\sin x < \frac{1}{2}$ б) $\sin x < -\frac{1}{2}$ в) $\sin x < 0$

3. Найдите решения следующих неравенств на отрезке $[0; 2\pi]$.

а) $\cos x < \frac{1}{2}$ б) $\cos x \le -\frac{1}{2}$ в) $\cos x < 0$

4. Найдите решения следующих неравенств на отрезке $[-\pi; \pi]$.

а) $\cos x > 0$ б) $\cos x > -\frac{1}{2}$ в) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Найдите решения следующих неравенств на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

а) $\mathrm{tg}\, x > -1$ б) $\mathrm{tg}\, x < -1$ в) $\mathrm{tg}\, x \ge \sqrt{3}$

6. Найдите решения следующих неравенств на промежутке $(0; \pi)$

а) $\mathrm{ctg}\, x < 1$ б) $\mathrm{ctg}\, x > \sqrt{3}$ в) $\mathrm{ctg}\, x \le 0$

7. Решите неравенства.

а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\sin x > -\frac{1}{2}$ в) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\sin x < \frac{1}{2}$

д) $\cos x \ge \frac{1}{2}$ е) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ж) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ з) $\cos x \le \frac{1}{2}$

и) $\mathrm{tg}\, x > \sqrt{3}$ к) $\mathrm{tg}\, x > -1$ л) $\mathrm{tg}\, x \le 1$ м) $\mathrm{tg}\, x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

н) $\mathrm{ctg}\, x > 1$ о) $\mathrm{ctg}\, x > -1$ п) $\mathrm{ctg}\, x \le \sqrt{3}$ р) $\mathrm{ctg}\, x < -\sqrt{3}$

8. Изучите пример. Решите неравенства.

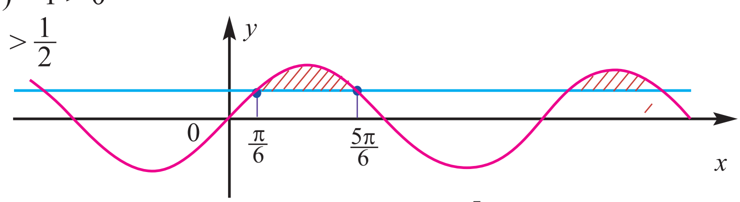
Пример. $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$

$\sin(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$

Пусть

$x + \frac{\pi}{6} = t$

$\sin t > \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad n \in Z$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in Z$

а) $2\sin 2x - \sqrt{3} > 0$ б) $2\cos 2x - \sqrt{2} \le 0$

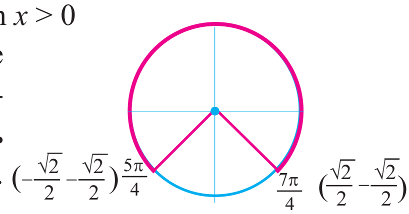
в) $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$ г) $2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1 < 0$

9. Запишите какой четверти единичной окружности удовлетворяют условия:

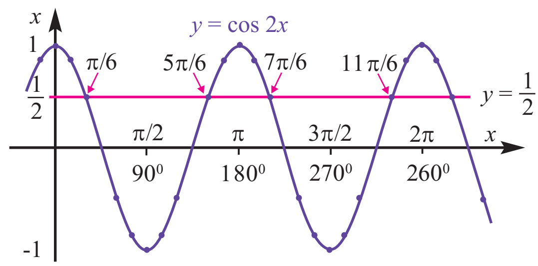
а) $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ б) $\cos x < 0$, $\operatorname{tg} x < 0$

в) $\sec x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ г) $\operatorname{tg} x < 0$, $\sin x > 0$

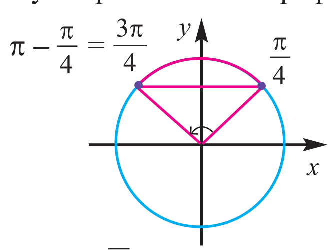
10. **Вопрос открытого типа.** Запишите тригонометрическое неравенство, решением которого является часть окружности красного цвета на рисунке.

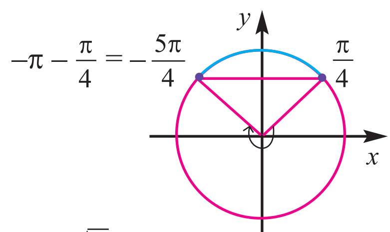


11. На рисунке изображены решения тригонометрического неравенства. Составьте тригонометрическое неравенство и запишите решения в виде интервала.



12. Решения неравенств $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ представлены как в общем виде, так и графически. На единичной окружности решению соответствует красная часть графика.





$\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

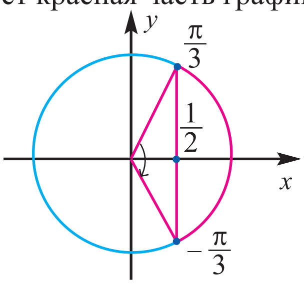
Представьте решения следующих неравенств по образцу:

а) $\sin t \geq \frac{1}{2}$ б) $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $\sin t \leq \frac{1}{2}$ д) $\sin t \geq -\frac{1}{2}$

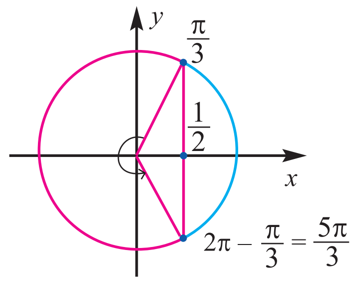
Тригонометрические неравенства

13. Решения неравенств $\cos t \geq \frac{1}{2}$ и $\cos t \leq \frac{1}{2}$ представлены как в общем виде, так и графически. На единичной окружности решению соответствует красная часть графика.



$\cos t \geq \frac{1}{2}$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$



$\cos t \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

Решите следующие неравенства по образцу.

а) $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\cos t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\cos t \geq -\frac{1}{2}$

14. При помощи тригонометрических тождеств, упростите и решите неравенства.

а) $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 3x \cdot \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
б) $\sin x \cdot \cos x > -\frac{1}{4}$
в) $\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x < \frac{1}{2}$

15. Разделив каждую часть неравенства на определённое число,введите вспомогательный угол и решите неравенства.

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > 1$ б) $\sin x - \cos x < 1$

16. Решите неравенства.

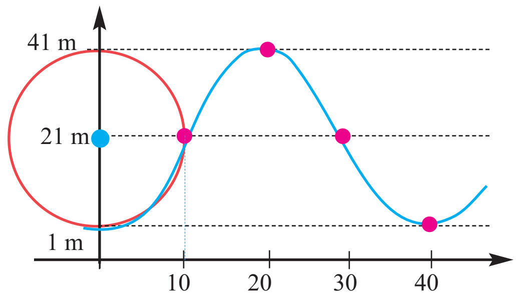
а) $(2\sin x - 1)\cdot(\sin x - 3) < 0$
б) $(2\cos x - \sqrt{3})\cdot(\cos x + 2) > 0$
в) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$

17. Решите неравенства на интервале $(0; 2\pi)$.

а) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \leq -\frac{1}{2}$
в) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$ г) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 0$
д) $\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ е) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) > -1$
ж) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$ з) $\sin(\frac{\pi}{4} - x) < \frac{1}{2}$

Пример решения задачи: Карусель, радиусом 20 м за каждые 40 секунд совершает один оборот. Самое низкое сиденье находится на высоте 1 м.

а) Изобразите график, соответствующий задаче.
б) Запишите функцию зависимости движения человека, находящегося на сиденье карусели в виде $h(t) = a\sin b(t - c) + d$.
в) В какие секунды за один полный оборот человек на карусели, окажется на высоте выше 21 м?



Решение: а) Изобразим схематично решение задачи. Отметим на окружности точки, соответствующие каждой четвёртой части оборота при движении карусели. Соединим эти точки и получим график, в виде синусоиды, движения карусели за один оборот (360°).

б)Из графика видно, что с 10 по 30 секунду человек на карусели, будет находится на высоте от 21 м и более.

в) По данным задачи и графику запишем формулу функции.

Зная период, найдём частоту b: $T = \dfrac{2\pi}{b}$

Т = 40 сек, $\quad \dfrac{360}{b} = 40 \quad b = \dfrac{360}{40} = 9$

Найдём амплитуду и среднюю линию, зная максимальное и минимальное значения.

$$a = \frac{\text{максимум} - \text{минимум}}{2} = \frac{41 - 1}{2} = 20$$

$$d = \frac{\text{максимум} + \text{минимум}}{2} = \frac{41 + 1}{2} = 21$$

Найдём фазу смещения c. Функция синуса принимает наибольшее значение в одной четвёртой периода. Однако можно заметить, что максимум функции достигается с задержкой на 10 секунд (на 20-ой секунде), а значит сдвиг по фазе $c = 10$.
Формула имеет вид $h(t) = 20 \sin 9(t - 10) + 21$.

Тригонометрические неравенства

Обобщающие задания

1. Вычислите при помощи калькулятора.

а) $\cos^{-1}(-0{,}8)$ б) $\sin^{-1} 0{,}99$ в) $\mathrm{tg}^{-1}\, 12$ г) $\cos^{-1} 0{,}55$

2. Найдите корни следующих уравнений на промежутке $[0; 2\pi)$ (или $[0; 360°)$)

а) $\sin(x + 60°) = \frac{1}{2}$ б) $\cos(x - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\mathrm{tg}(x + 45°) = -1$ г) $\sin(x - 20°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

д) $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ е) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = 1$

3. Решите неравенства на интервале $0 < x < 2\pi$.

а) $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos x - \frac{1}{2} > 0$ в) $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$

г) $\sin x \le 0$ д) $\mathrm{tg}\, x \ge \sqrt{3}$ е) $\sec^2 x \le 4$

ж) $\cos^2 x > \frac{1}{2}$ з) $\cos 2x \le 0$ и) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$

к) $\cos^2 x \ge \frac{1}{3}$ л) $2\cos x \ge 1$ м) $\sin 5x \ge 5$

н) $\cos 2x \le 1$ о) $\sec x \le \sqrt{2}$ п) $\mathrm{ctg}\, x \le 4$

4. Решите уравнения.

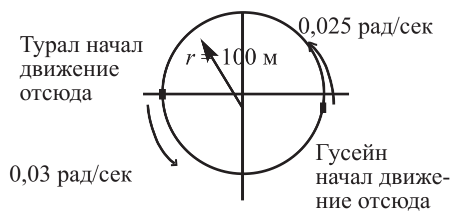
а) $2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = -1$ д) $\sin x + 2 = 3$

б) $5\sec^2 x = 6\sec x$ е) $2\cos^2 x - \cos x = 1$

в) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ ж) $\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 4 = 0$

г) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x = 0$ з) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$

5. Турал и Гусейн бегают по кругу, радиусом 100 м, как показано на рисунке. Они начали двигаться из точек, указанных на рисунке, в направлении против часовой стрелки. Скорость Турала 0,03 рад/сек., а Гусейна 0,025 рад/сек.



а)Определите координаты точек в которых они окажутся через 6 секунд.

б) Какой путь они пробегут за 8 секунд ?

в) Выразите угол поворота, который опишет Турал за время t секунд.

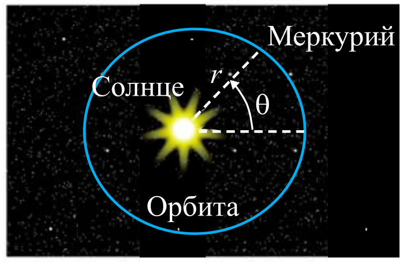
г) На какой секунде, в первый раз, Турал пересечет точку с абсциссой 50?

д) На какой секунде, в первый раз, Гусейн пересечет точку с абсциссой 50?

е) На какой секунде в первый раз Турал обгонит Гусейна?

6. **Астрономия.** Планета Меркурий движется вокруг Солнца по орбите в виде эллипса. Движение планеты можно задать формулой:

$$r = \frac{3{,}44 \times 10^7}{1 - 0{,}206 \cos\theta}$$



При каком наименьшем положительном значении угла θ планета Меркурий будет находится от Солца на расстоянии 4×10^7 км?

7. На некоторой территории зависимость между увеличением количества кроликов (с увеличением количества хищников) от времени, можно смоделировать так: $D(t) = 400\cos\frac{\pi t}{4} + 800$. Здесь D - количество кроликов, t - время, начиная с 2000 года.

а) Каково максимальное и минимальное количество кроликов?

б) Каково количество кроликов в этому году (в текущем году)?

в) В каком году число кроликов было приблизительно равно1000?

г) Изобразите график функции за 2 года.

8. В течении года собиралась информация о продолжительности светового дня в городе(в час). Зависимость была смоделирована функцией

$$D(x) = \frac{38}{3} - \frac{11}{3}\cos\frac{2\pi}{365}x$$

Здесь x показывает номер дня от начала года.

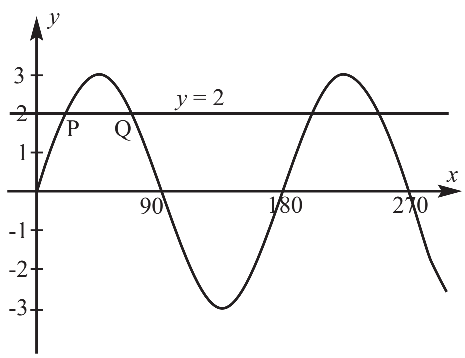
а) Какова продолжительность дня 1 января, 22 марта и 5 ноября?

б)В какие дни продолжительность светового дня составила более 11 часов?

9. На рисунке изображён график функции $y = a \sin bx$.

а) По графику найдите значения a и b.

б) Найдите координаты точек P и Q пересечения функции с прямой $y = 2$.



10. Найдите решения следующих уравнений на промежутке $[0; 2\pi)$.

а) $2\cos^2 x = \sin x$

б) $\sin^3 x - 5\sin x = 0$

в) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

г) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$

д) $\mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{3}$

е) $\sin 3x - \cos 2x = 2$

8 Объём пространственных фигур

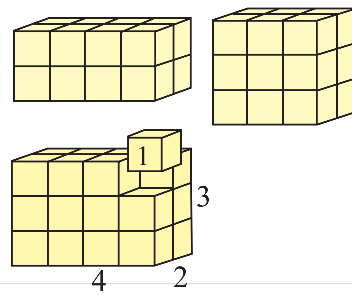
Объём призмы
Объём пирамиды
Подобие пространственных фигур
Площади и объёмы подобных фигур
Объём усечённой пирамиды
Задачи на сечения плоскостью
Симметрия в пространстве

Объём призмы

Исследование. Соберите не менее 4 призм различных размеров из кубиков и изобразите полученные призмы.

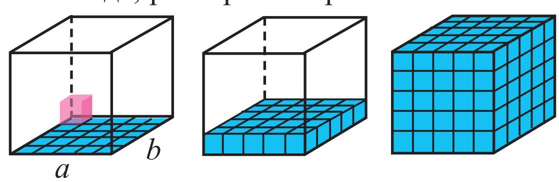
1. Предположим, что ребро каждого кубика, из которых состоит призма, равна 1 единице, площадь грани равна 1 квадратной единице, а объём равен 1 кубической единице.
2. Данные для каждой призмы запишите в таблицу.
3. Какая связь существует между площадью основания призмы и высотой?
4. Вытащите один кубик из угла конструкции и изобразите вид впереди, сверху и сбоку каждого кубоида.

Призма	Площадь основания	Высота	Объём
1.			
2.			
3.			
4.			



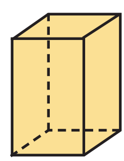
Если тело можно разделить на конченое число треугольных пирамид, то оно называется простым телом. Для простых тел объём - положительная величина, численное значение которой удовлетворяет следующим свойствам.
1) Объёмы конгруэнтных тел равны.
2) Объём куба, ребро которого равно единице, равен кубической единице.
3) Если тело можно разделить на простые части, то его объём равен сумме объёмов полученных частей.
Тела, имеющие одинаковые объёмы называются равновеликими.

Объём прямоугольного параллелепипеда, размеры которого являются натуральными числами, равен количеству кубических единиц, из которых он состоит. Можно также показать, что объём прямоугольного параллелепипеда, размеры которого заданы любыми действительными числами равен произведению трёх измерений: **V=** $\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}$. Формулу объёма можно записать как произведение площади основания $a \cdot b$ и высоты c.



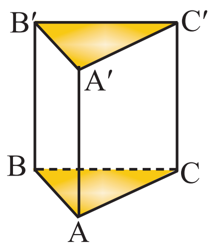
Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты: $\mathbf{V = S_{осн.}}\boldsymbol{h}$

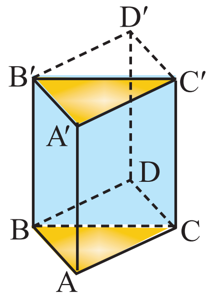
Следствие: Объём куба с ребром a равен: $\mathbf{V} = \boldsymbol{a}^3$



Объём любой прямой призмы равен произведению площади основания и высоты.Справедливость данного утверждения проверим на прямой призме, в основании которой лежит прямоугольный треугольник.

Объём призмы

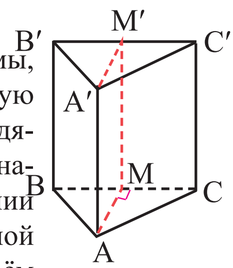




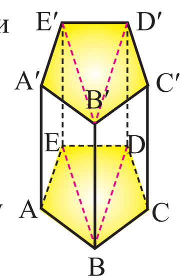
Достроим основание призмы до прямоугольника, получим призму, достроенную до прямоугольного параллелепипеда. Объём полученной призмы равен $V = AB \cdot AC \cdot AA'$.

Плоскость $BB'CC'$, проходящая через диагональ параллелепипеда делит призму на две конгруэнтные треугольные призмы. Значит, объём прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник будет:

$$V = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot AA' = S_{осн.}h$$



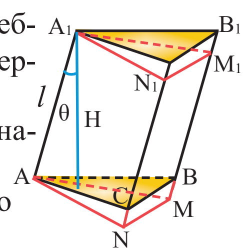
В треугольнике ABC, являющимся основанием прямой призмы, проведём высоту так, чтобы она пересекала противоположную сторону во внутренней области: $AM \perp BC$. Плоскость, проходящая через ребро AA' перпендикулярно ребру BC имеет одинаковую высоту с призмой, и делит её на две призмы, в основании которых лежат прямоугольные треугольники. Объём заданной призмы равен сумме объёмов полученных призм. Значит, объём прямой призмы с произвольным треугольником в основании равен произведению площади основания и высоты.



Если основанием прямой призмы является произвольный многоугольник, то её также можно разделить на треугольные призмы и найти её объём как сумму объёмов данных призм.

Наклонную призму $ABCA'B'C'$ преобразуем в прямую призму равного объёма. Для этого:

1. проведём плоскость перпендикулярную боковым рёбрам;
2. отделим оставшуюся при сечении верхнюю часть призмы;
3. переместим и соединим её с оставшейся внизу частью;
4. высота полученной прямой призмы является боковым ребром наклонной призмы, т.е. $h = l$, основание же является перпендикулярным сечением наклонной призмы.



Объём данной прямой призмы является также объёмом наклонной призмы.

Следствие. Объём наклонной призмы равен произведению перпендикулярного сечения и ребра призмы: $\boldsymbol{V = S_{\perp} \cdot l}$

Угол между перпендикулярным сечением и основанием равен углу θ между боковым ребром и высотой призмы. Поэтому,

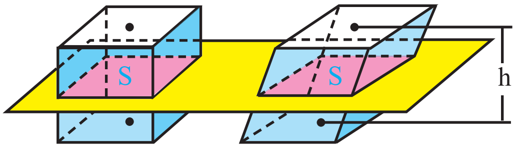
$$V = S_{\perp} \cdot l = S_{осн.} \cdot \cos\theta \cdot l = S_{осн.} \cdot H$$

Таким образом объём призмы равен произведению площади основания и высоты. $\boldsymbol{V = S_{осн.} \cdot H}$

Объём призмы

Принцип Кавальери для нахождения объёмов. Если площади сечений параллельных основаниям двух тел равны, то равны и их объёмы, при условии, что основания лежат в одной плоскости, а высоты равны.

Этот принцип открыл итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598-1647).

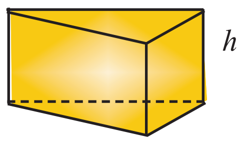


Объём призмы

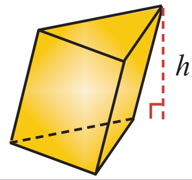
Объём призмы равен произведению площади основания и высоты.

$$V = S_{осн.}h$$

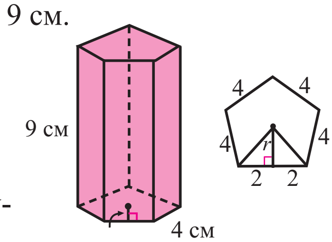
Прямая призма



Наклонная призма



Пример. Найдём объём правильной пятиугольной призмы, стороны основания которой равны 4 см, а длина бокового ребра 9 см.



Центральный угол правильного пятиугольника равен 360 : 5 = 72°, а значит апофема равна:

$$r = \frac{2}{\text{tg}36^\circ}$$

Площадь правильного многоугольника равна полупроизведению периметра и апофемы.

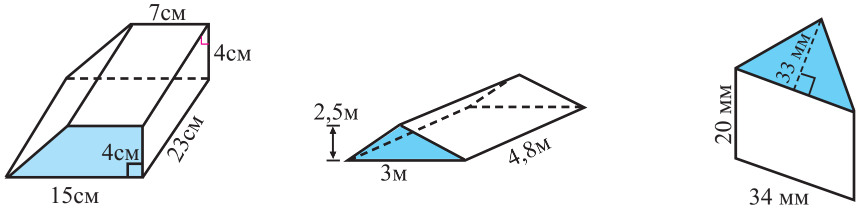
$$S_{осн.} = \frac{1}{2}P\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{2}{\text{tg}36^\circ} = \frac{20}{\text{tg}36^\circ} \qquad V = S_0\cdot h = \frac{180}{\text{tg}36^\circ} \approx 248\ (\text{см}^3)$$

1. По данным таблицы найдите размеры, помеченные вопросительным знаком.

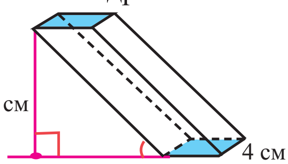
Размеры прямоугольного параллелепипеда	Значения					
длина a	6	20	2	3	?	8
ширина b	4	30	5	?	8	2
высота c	3	15	?	4	2	?
$S_{бок.}$	?	?	?	40	40	60
$S_{п.п.}$	?	?	?	?	?	?
V	?	?	60	?	?	?

2. Металлический блок в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами 8 см × 15 см × 40 см в целом состоит из металлическими пластин с рисунком. Размеры каждой из них равны 1 см × 1,5 см × 2 см. Сколько таких пластин израсходовали для данной конструкции?

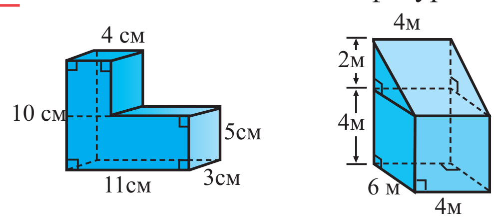
3. По данным рисунка найдите объём прямой призмы.



4. Найдите объём наклонной призмы, основанием которой является квадрат.



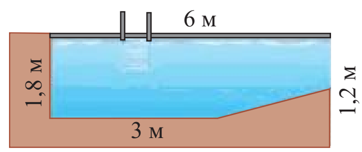
5. Найдите объём сложных фигур.



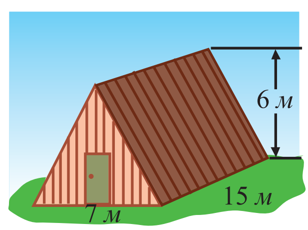
6. Как изменится объём параллелепипеда, если:
а) одно из измерений увеличить 2 раза; б) каждое из двух измерений увеличить в 2 раза; в) все три измерения увеличить в 2 раза?

7. Фирма по производству молочных изделий, в рамках новой кампании планирует на 25 % увеличить размер упаковки молока, при этом не изменяя её цены. Как это можно сделать, изменив только высоту упаковки?

8. Длина бассейна 10 м. По данным продольного сечения на рисунке, найдите:
а) сколько тонн составляет вместимость бассейна (1м^3 = 1 тон)?
б) сколько кубических метров в минуту выкачивает каждая из двух одинаковых труб, если работая вместе они опустошают бассейн за 4 часа?

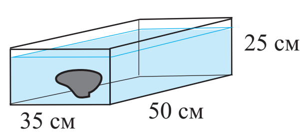


9. Форму какой пространственной фигуры имеет зернохранилище на рисунке? Сколько граней и рёбер имеет фигура? По заданным на рисунке размерам, найдите объёма зернохранилища.



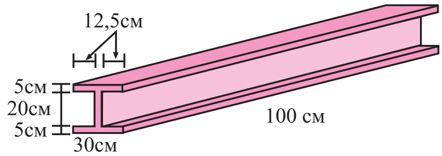
10. а) Докажите,что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
б) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если $a = 3$, $b = 4$, d=13

11. Найдите объём камня, брошенного в посуду с водой, если при этом уровень воды повысился на 0,5 см.



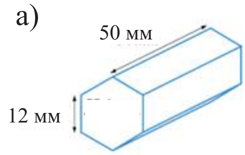
Объём призмы

12. Плотность металла на рисунке равна 7860 кг/м³. Найдите общую массу металлической балки.

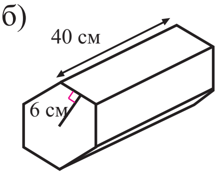


13. Найдите объём правильной шестиугольной призмы.

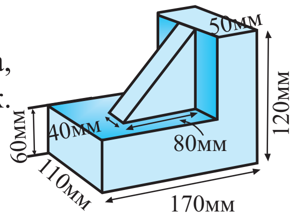
а)



б)



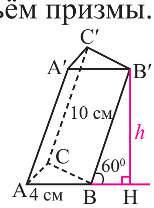
14. а) По данным на рисунке, найдите площадь полной поверхности конструкции.
б) Цена 1 см³ конструкции из алюминия 2 гяпика, а цена 1 см³ более прочного материала 10 гяпик. На сколько манат конструкция из алюминия дешевле?



15. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна 48 см², а высота 8 см. Найдите: а) длину основания; б) объём призмы.

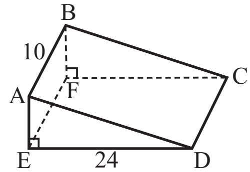
16. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна $6\sqrt{3}$ см, высота 4 см. Найдите площадь боковой поверхности и объём призмы.

17. Боковые рёбра наклонной призмы составляют с плоскостью основания угол 60°. Основанием призмы является равносторонний треугольник со стороной 4 см. Боковое ребро равно 10 см. Найдите объём призмы.

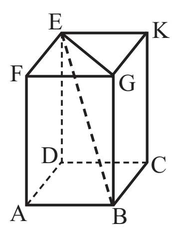


18. а) Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда равны 2 см², 3 см² и 6 см². Найдите его объём.
б) Размеры прямоугольного параллелепипеда 3 см, 4 см и 5 см. При увеличении каждой стороны на x см площадь поверхности увеличивается на 54 см². Найдите, на сколько при этом изменится объём.

19. На рисунке изображён склон прямоугольной формы, который превратили в прямую поверхность CDEF, также прямоугольной формы, выкопав землю. AB = 10 м, ED = 24. При этом площадь уменьшилась на 10 м². Сколько кубических метров земли было выкопано?



20. Найдите объём прямой призмы на рисунке, если в основании лежит квадрат, S_{ABCD}=24 см², а $\angle BEG = 60°$.



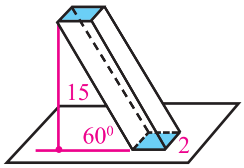
Объём призмы

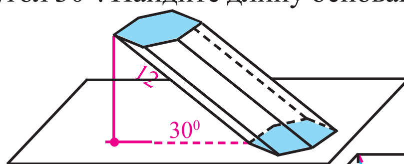
21. Найдите объём прямого параллелепипеда, основанием которого является ромб с площадью 2 дм^2, если площади диагональных сечений равны 9 дм^2 и 16 дм^2.

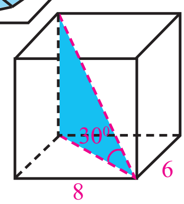
22. Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, если диагональ боковой грани равна 5 м, а диагональ призмы равна 7 м.

23. а) В основании наклонной призмы лежит квадрат со стороной 2 единиц. Боковое ребро равно 15 единицам и составляет угол 60° с плоскостью основания. Найдите объём призмы.

б) Объём наклонной призмы, в основании которой лежит правильный шестиугольник равен $36\sqrt{3}$ куб. ед. Боковое ребро, длиной 12 ед. составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите длину основания.







24. а) По данным на рисунке найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 30°.

б) Коробка имеющая форму прямоугольного параллелепипеда также имеет размеры 8 × 6, однако его диагональ составляет с основанием угол 60°. Покажите, что отношение объёмов этих параллелепипедов равно $\dfrac{\text{tg}60°}{\text{tg}30°}$.

25. Основание прямой призмы квадрат. Длина бокового ребра в 3 раза больше стороны основания.Площадь полной поверхности 350 м^2. Найдите объём призмы.

26. Все рёбра правильной треугольной призмы равны x. Докажите, что её объём равен $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^3$.

27. Найдите объём прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания.

28. Найдите объём наклонной треугольной призмы, если боковые ребра равны 20 см, а стороны перпендикулярного сечения 13 см, 14 см и 15 см.

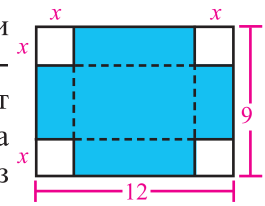
29. Высота правильной шестиугольной призмы равна h, а стороны основания равны a. Докажите, что её объём равен $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2h$.

30. Найдите длину ребра правильной треугольной призмы, если все 9 рёбер имеют равную длину и объём призмы равен $16\sqrt{3}$ см^3 .

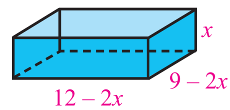
31. Длину и ширину прямоугольного параллелепипеда уменьшили на 20 %. На сколько процентов надо увеличить его высоту, чтобы объём остался прежним?

32. Проектная работа

Информатика: От куска картона с размерами 9 см × 12 см, по углам, отрезали квадраты. Если сложить картон по пунктирным линиям он приобретёт форму коробки. Какие размеры должна иметь коробка наибольшего объёма? Выразим объём коробки через переменную x : $V = (12 - 2x)(9 - 2x)x$



Значения x для этой коробки могут меняться от 0 до $\frac{9}{2}$ $(0 < x < 4{,}5)$. Следующая компьютерная программа рассчитала значения объёма для 10 значений переменной x .




```
10    PRİNT    "X", "ОБЪЁМ"
15    PRİNT
20    FOR  X = 0  TO  4,5 STEP 0,5
30    LET   V = (12 – 2*X) (9 – 2*X) *X
40    PRİNT  X,  V
50    NEXT  X
60    END
```

X	ОБЪЁМ
0	0
0,5	44
1	70
1,5	81
2	80
2,5	70
3	54
3,5	35
4	16
4,5	0

Результаты программы, напечатанные справа показывают,что максимальное значение объёма 81 достигается при x равных между 1 и 2.

Выполните следующие действия.

а) Для более точных вычислений выберите такую команду, которая вычислит значения x между 1 и 2 с шагом 0,1.

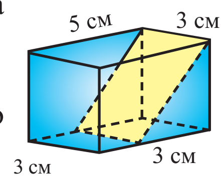
б) Измените 20 -ю команду так, чтобы объём вычислялся с точностью до 0,1 см^3.

в) Запишите размеры коробки(длину, ширину и высоту) при максимальном объёме.

г) Составьте программу, для картона с размерами 8 см × 20 см и выполните её на компьютере.

д) Выполните необходимые шаги для выполнения данной программы на компьютере (можете изменить язык программирования).

33. На рисунке изображена коробка, крышка которой упала внутрь. Площадь крышки 15 см^2.

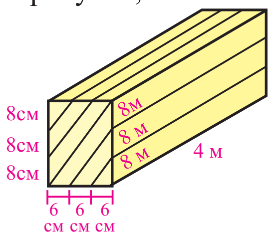


а) Найдите третье измерение коробки.

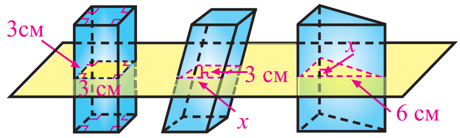
б) Найдите объём меньшей замкнутой части, которую отделяет крышка.

в) Найдите объём большей открытой части коробки.

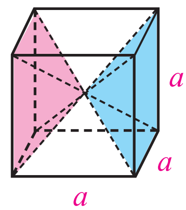
34. Найдите объём каждой части, полученной при делении бруска длиной 4 м, шириной 18 см и толщиной 24 см на рисунке, на 6 частей.



35. Объёмы и высоты фигур равны. Найдите размер x.



Исследование. 1. Диагонали куба делят его на 6 конгруэнтных пирамид. Основание каждой пирамиды - грань куба, а высота каждой пирамиды равна $\frac{1}{2}a$.



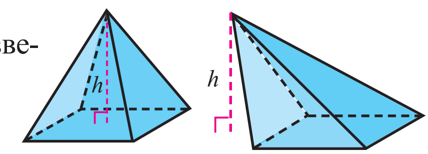
а) Докажите, что объём каждой пирамиды равен $V = \frac{1}{6}a^3$

б) Докажите, что объём каждой пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_{осн.}h$.

Объём пирамиды

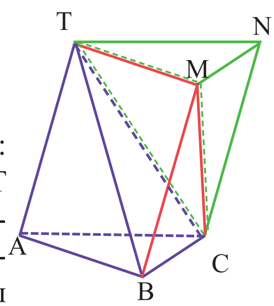
Объём пирамиды равен одной третьей произведения площади основанию на высоту.

$$V = \frac{1}{3}S_{осн.}h$$



Пусть, TABC -треугольная пирамида с вершиной T и основанием ABC. Достроим эту пирамиду до треугольной призмы. Полученная призма состоит из трёх пирамид:

1) заданной пирамиды TABC,
2) пирамиды TCNM;
3) пирамиды TMBC.

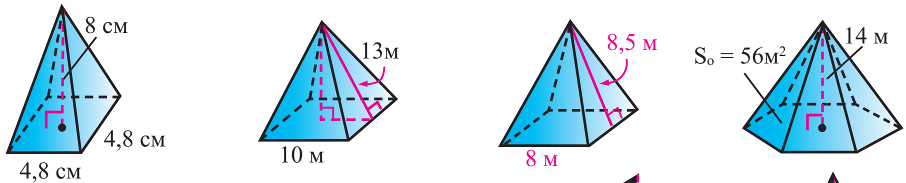


Основания 2-ой и 3-ей пирамид конгруэнтны: $\Delta CNM \cong \Delta MBC$ и высота, проведённая из вершины T общая. Поэтому их объёмы равны. Основания 1-ой и 3-ей пирамид конгруэнтны: $\Delta TAB \cong \Delta BMT$ и высота, проведённая из вершины C общая. Поэтому и их объёмы равны. Тогда объём заданной пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{осн.}h$.

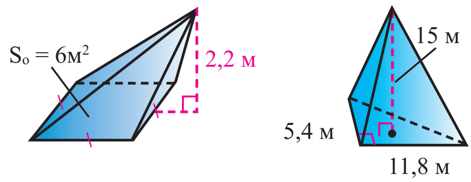
Основание любой пирамиды всегда можно разделить на треугольники и найти объём пирамиды суммировав объёмы всех полученных пирамид. Таким образом, объём любой пирамиды равен одной третьей произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3}S_{осн.}h$

Объём пирамиды

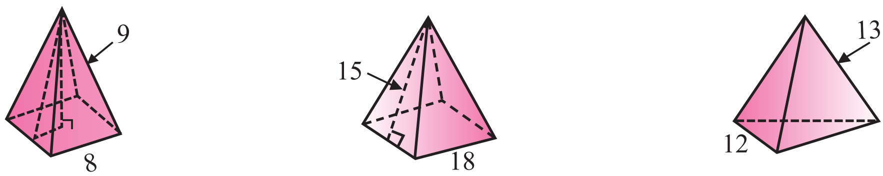
1. а) По данным на рисунке найдите объём правильной пирамиды.



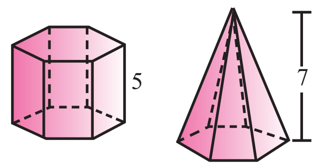
б) По данным на рисунке найдите объём пирамиды.



2. По данным на рисунке найдите объём правильной пирамиды.



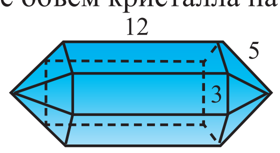
3. Основания призмы и пирамиды являются конгруэнтными фигурами. Высота призмы 5 ед., а высота пирамиды 7 ед. Найдите отношение объёмов данных фигур.

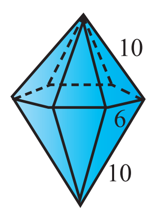


4. Найдите объём прямоугольной пирамиды, стороны основания которой равны 18 мм и 24 мм, а каждое боковое ребро равно 25 мм.

5. Каждое боковое ребро треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см, равно 13 см. Найдите объём пирамиды.

6. Найдите объём кристалла на рисунке.

а) 

б) 

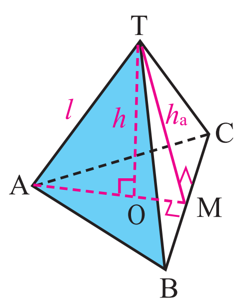
7. Выполните задания по рисунку, если TABC правильная треугольная пирамида.

а) Если AM = 9 и TM = 5 , то найдите h и l.

б) Если BC = 6 , то найдите AO и AM.

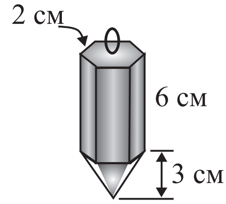
в) Если h = 4, l = 5, то найдите BC, OM и AM, а также площадь боковой и объём.

г) Если AB = 12, TA = 10 , то найдите апофему, площадь боковой поверхности и объём.



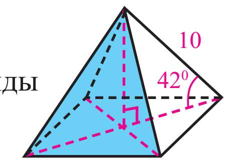
Объём пирамиды

8. Для выверки вертикального положения, в строительстве, обычно используется инструмент, который называется отвесом. Отвес на рисунке состоит из правильной шестиугольной призмы и пирамиды. Найдите объём инструмента.

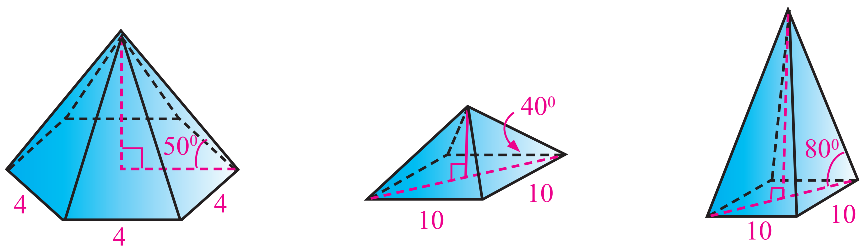


9. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 10 см, а сторона основания 6 см. Найдите объём пирамиды.

10. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды на рисунке. Результат округлите до десятых.



11. Найдите объёмы правильных пирамид. Результат округлите до десятых.



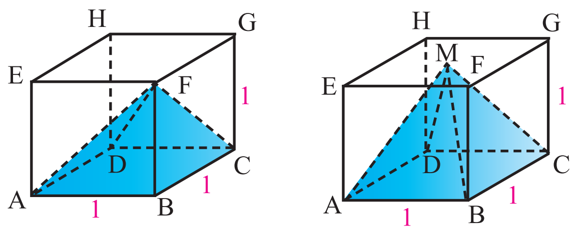
12. Основанием пирамиды является ромб со стороной 3 см. Все боковые грани составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём пирамиды, если $S_{бок.}$=12 см^2 .

13. Найдите объём треугольной пирамиды, если одно из рёбер пирамиды равно 6 см, а остальные 5см.

14. Даны два конгруэнтных куба. Внутри каждого из них проведены две разные пирамиды F-ABCD и M-ABCD . Вершина M пирамиды M-ABCD находится в центре квадрата EFGH.

а) Объём какой из пирамид больше?

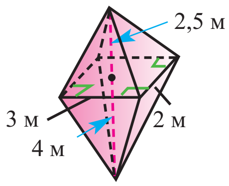
б) Площадь полной поверхности какой из пирамид больше?

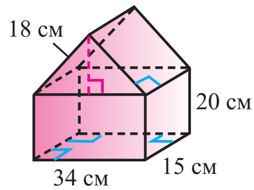


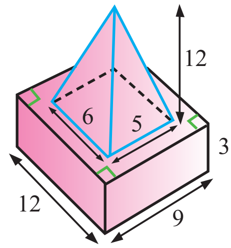
15. Боковые грани треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и их площади равны 24 дм^2, 16 дм^2 и 12 дм^2. Найдите объём пирамиды.

Объём пирамиды

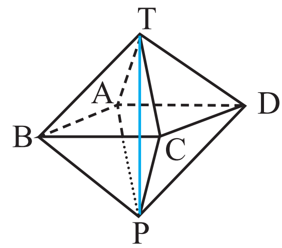
16. По данным на рисунке найдите объёмы фигур.



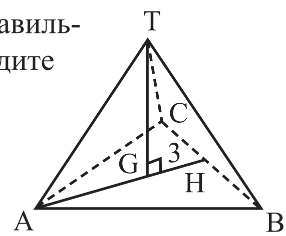




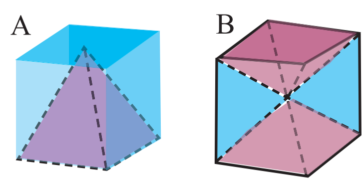
17. Сумма длин рёбер правильного октаэдра равна 18 ед. Найдите: а) высоту; б) объём октаэдра.



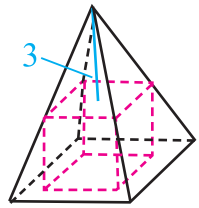
18. Точка G является центром тяжести основания правильного тетраэдра (точка пересечения медиан). Найдите объём пирамиды, если GH = 3 см.



19. Даны два конгруэнтных куба. Основание каждой пирамиды лежит на грани куба. Найдите отношение объёма пирамиды на рисунке B к объёму пирамиды на рисунке A.



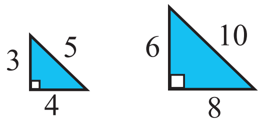
20. В пирамиду вписан куб , как показано на рисунке. Нижнее основание куба и основание пирамиды расположены в одной плоскости. Объём меньшей пирамиды, основанием которой является верхняя грань куба, равен 36 см^3, а высота 3 см. Найдите:
а) длины рёбер куба.
б) длину основания большей пирамиды..
в) объём большей пирамиды.
г) площадь боковой поверхности большей пирамиды.



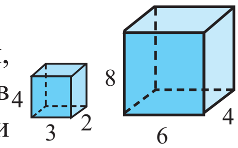
Подобие фигур в пространстве

Подобные фигуры имеют одинаковую форму и пропорциональные размеры.

Например, прямоугольные треугольники на рисунке подобны, так как отношения соответствующих сторон равны.



$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$$

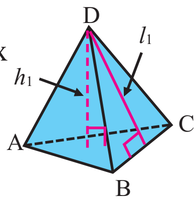


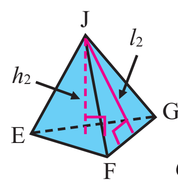
$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$$

Прямоугольные параллелепипеды на рисунке подобны, так как отношения соответствующих линейных размеров равны и соответствующие грани являются подобными четырёхугольниками. Правильные многогранники подобны. В частном случае подобными являются все кубы, правильные тетраэдры и т.д.

Подобные фигуры

Если при преобразовании расстояние между любыми двумя точками, меняется в одинаковое число раз, то такое преобразование называется подобием. Одна и другая, полученная при преобразовании подобием, фигура называются подобными фигурами. Коэффициент подобия равен отношению расстояний между парой любых двух соответсвующих точек.



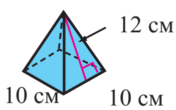


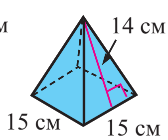
$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CA}{GE}=\frac{AD}{EJ}=\frac{BD}{FJ}=\frac{CD}{GJ}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{l_1}{l_2}=k$$

$\Delta ABC \sim \Delta EFG$, $\Delta ABD \sim \Delta EFJ$,
$\Delta BCD \sim \Delta FGJ$, $\Delta ACD \sim \Delta EGJ$

Отношение соответствующих сторон называется ***коэффициентом подобия.***

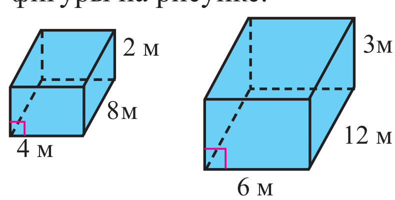
Пример. Определим подобны или нет фигуры на рисунке.





$$\frac{10}{15}=\frac{10}{15}\neq\frac{12}{14}$$

Фигуры не являются подобными



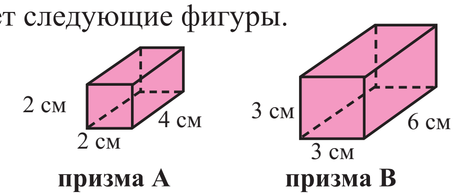
$$\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Фигуры являются подобными

Площади поверхностей и объёмы подобных фигур

Исследование. Покажите подобны или нет следующие фигуры.

Призмы A и B (прямоугольные параллелепипеды) подобные призмы с коэффициентом подобия равным $\frac{2}{3}$.



Для данных призм найдите:

а) отношение площадей полных поверхностей;

б) отношение объёмов.

а) площадь полной поверхности призмы A

$S_{п.п.} = Ph + 2S_{осн.} =$

$= 12{\cdot}2 + 2{\cdot}8 = 40$ (см²)

площадь полной поверхности призмы B

$S_{п.п.} = Ph + 2S_{осн.} =$

$= 18{\cdot}3 + 2{\cdot}1\,8 = 90$ (см²)

Отношение полной поверхности призмы A к полной поверхности призмы B

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

б) объём призмы A

$V = S_{осн.}h = 8 \cdot 2 = 16$ (см³)

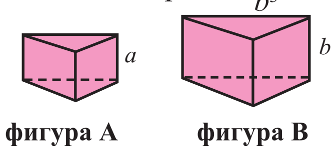
объём призмы B

$V = S_{осн.}h = 18 \cdot 3 = 54$ (см³)

Отношение объёма призмы A к объёму призмы B $\frac{16}{54} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Площади поверхностей и объёмы подобных фигур

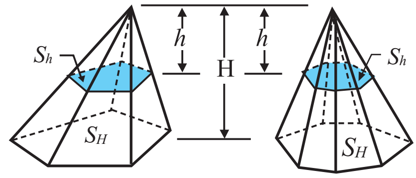
Если коэффициент подобия двух пространственных фигур равен $\frac{a}{b}$, то отношение площадей (боковых, полных, оснований) равно $\frac{a^2}{b^2}$, а отношение объёмов равно $\frac{a^3}{b^3}$.



Коэффициент подобия: $\frac{a}{b}$

$$\frac{S_{п.п.A}}{S_{п.п.B}} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3}$$

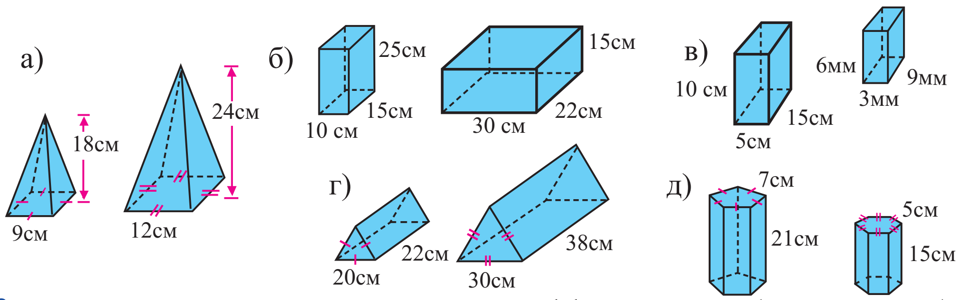
Пирамида, полученная сечением плоскости параллельной основанию, подобна данной. Коэффициент подобия можно найти из отношения соответствующих линейных размеров. Например, на рисунке даны высоты. Тогда, отношения их боковых поверхностей, оснований и полных поверхностей равно квадрату отношения высот.



$$\frac{S_{мал.}}{S_{бол.}} = \frac{h^2}{H^2}$$

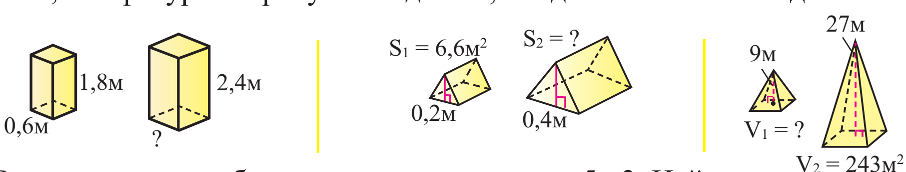
Площади поверхностей и объёмы подобных фигур

1. Покажите подобны или нет фигуры на рисунке.



2. По данным на рисунке, определите коэффициент подобия двух подобных фигур.

3. Зная, что фигуры на рисунке подобны, найдите неизвестные данные.



4. Высоты двух подобных призм относятся как 5 : 3. Найдите:

а) отношение боковых поверхностей;

б) отношение объёмов.

5. Правильные четырёхугольные пирамиды А и В подобны. Сторона основания пирамиды А равна 6 см, объём 48 см^3. Сторона основания пирамиды В равна12 см. Найдите:

а) объём пирамиды В ;

б) отношение боковых поверхностей;

в) площадь полной поверхности каждой пирамиды.

6. Даны площади поверхностей двух подобных фигур и объём большей фигуры. Найдите объём меньшей фигуры.

а) $S_1 = 18$ см^2, $S_2 = 72$ см^2, $V_2 = 344$ см^3

б) $S_1 = 192$ м^2, $S_2 = 1728$ м^2, $V_2 = 4860$ м^3

в) $S_1 = 52$ дм^2, $S_2 = 208$ дм^2, $V_2 = 192$ дм^3

7. Даны объёмы двух подобных фигур и площадь поверхности меньшей фигуры. Найдите объём большей фигуры.

а) $V_1 = 27$ см^3, $V_2 = 125$ см^3, $S_1 = 63$ см^2

б) $V_1 = 5$ м^3, $V_2 = 40$ м^3, $S_1 = 4$ м^2

в) $V_1 = 54$ см^3, $V_2 = 128$ см^3, $S_1 = 18$ см^2

Площади поверхностей и объёмы подобных фигур

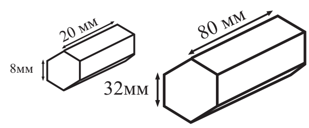
8. Фирма по производству стирального порошка, для нового вида порошка, увеличивает упаковки в определённом масштабе и получает новые коробки. Размеры коробки, вместимостью 450 грамм увеличивается в масштабе 1 : 2. Найдите вместимость новой коробки.

9. Найдите разность объёмов двух кубов, если диагональ одного из них равна $\sqrt{3}$ см , а другого $4\sqrt{3}$.

10. Объёмы двух подобных пирамид равны 2 и 54 куб.ед. Найдите следующие отношения: а) высот б) апофем в) площадей оснований г) полных поверхностей

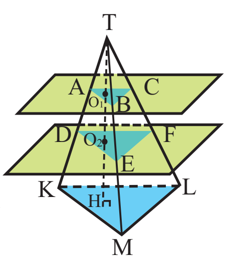
11. Модель самолёта выполнена в масштабе 1:200. Сравните количество краски, необходимой для покраски реального самолёта и его модели.

12. Две медные детали в форме правильного шестиугольника подобны. Плотность меди 8,6 г/см^3, цена 1 кг меди 2,55 гяпик. Фирма по производству деталей определяет себестоимость детали (не зависимо от размера) из стоимости материала и 125% от затрат на производство. Розничная цена продажи формируется фирмой добавлением к себестоимости 22% прибыли. Найдите розничную цену продажи каждой детали.



13. Для создания дизайна нового автомобиля сначала изготовляют модель из глины в соответствующем масштабе. Длина глиняной модели равна 10 см, а длина реального автомобиля 5 м. Найдите отношение площади поверхности модели из глины к площади поверхности реального автомобиля

14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды на рисунке равна 8 см, а высота 12 см. Пирамида пересекается плоскостями, параллельными основаниям на расстоянии 4 см и 6 см начиная от вершины T. Найдите периметры многоугольников, образованных сечениями.



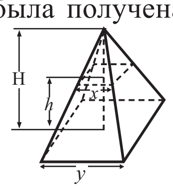
15. Найдите расстояние от вершины пирамиды высотой H до плоскости параллельной основанию, если она делит объём пирамиды пополам.

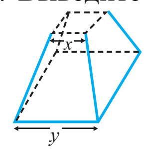
16. Плоскости, параллельные основанию пирамиды, делят её высоту на три равные части. В каком отношении плоскости делят объём пирамиды.

17. Высоты двух подобных пирамид относятся как 1:3. Найдите площадь боковой поверхности, если разность площадей боковых поверхностей равна 96 м^2.

Объём усечённой пирамиды

Исследование. В древнем Египте объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды вычисляли по формуле $V = \frac{1}{3}h(x^2 + xy + y^2)$. Однако доподлинно не известно каким образом эта формула была получена. Выведите формулу, выполнив следующие шаги:





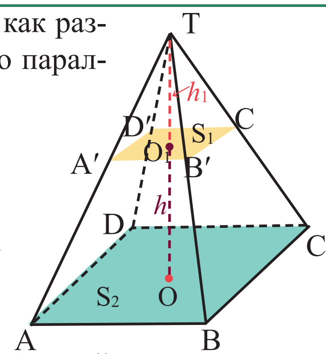
а) Запишите объём правильной четырёхугольной пирамиды, со стороной основания y ед.

б) Запишите объём правильной четырёхугольной пирамиды, со стороной основания x ед.

в) Покажите зависимость между высотами H и h, как $H = \dfrac{yh}{y - x}$

г) Покажите, что объём усечённой пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(x^2 + xy + y^2).$$



Объём усечённой пирамиды можно также найти как разность объёмов пирамид, при сечении плоскостью параллельной основанию.

$$V = \frac{1}{3}S_2(h_1 + h) - \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$$

Здесь V - объём усечённой пирамиды, S_2 и S_1 площади нижнего и верхнего оснований. h - высота усечённой пирамиды, h_1 - высота меньшей пирамиды.

Так как эти пирамиды подобны, то отношение площадей равно квадрату отношений высот. Запишем это равенство и найдём высоту меньшей пирамиды.

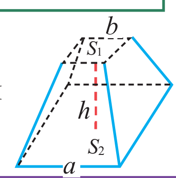
$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_1}{h_1 + h}\right]^2, \qquad \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \qquad h_1\sqrt{S_2} = (h_1 + h)\sqrt{S_1}, \qquad h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$$

Учитывая выражение $h_1 = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ в равенстве $V = \dfrac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$.

получим:
$$V = \frac{1}{3}\left[(S_2 - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} + S_2h\right] = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1})h\sqrt{S_1} + S_2h] =$$
$$= \frac{1}{3}(h \cdot \sqrt{S_1S_2} + h\,S_1 + h\,S_2) = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

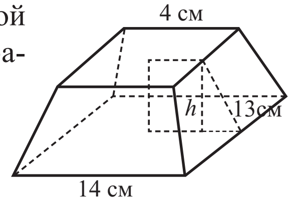
Объём усечённой призмы



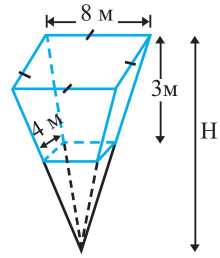
Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2, и высотой h вычисляется по формуле $\mathbf{V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)}$

Объём усечённой пирамиды

1. По данным на рисунке найдите площадь боковой поверхности, полной поверхности и объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды.

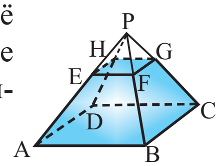


2. На рисунке даны размеры пирамиды, полученной при сечении плоскостью параллельной основанию пирамиды высотой H. Найдите:
а) объём усечённой пирамиды;
б) высоту H;
г) сколько машин вместимостью 12 м^3 потребуется для транспортировки земли, если вырыть бассейн для воды данной формы;
г) сколько литров воды вмещает бассейн;
д) какова глубина воды, если бассейн заполнить на половину объёма?

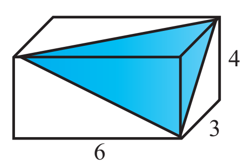


3. а)Все 6 рёбер правильной треугольной пирамиды равны x.Выразите объём пирамиды через x.
б) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна x, боковое ребро $2x$. Выразите объём пирамиды через x.

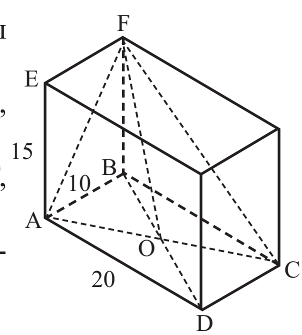
4. Плоскость проходящая параллельно основанию делит её высоту в отношении 1: 2 начиная от вершины. Найдите объём пирамиды, если объём полученной усечённой пирамиды равен 208 куб. ед.



5. а) Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а боковое ребро 10 см.
б) Сравните объёмы прямоугольного параллелепипеда и пирамиды, полученной при сечении его плоскостью, как показано на рисунке.

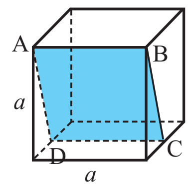


6. Размеры прямоугольного параллелепипеда равны AD = 20 см, AB = 10 см, AE = 15 см.
а) найдите градусные меры углов $\angle AFB$, $\angle BFO$, $\angle AFO$, $\angle BOF$, $\angle AOF$, $\angle OFC$;
б) найдите площади треугольников ΔABO, ΔBOF, ΔAOF ;
в) наименьшее расстояние от точки B до плоскости AOF.

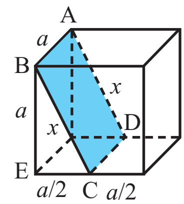


Задачи на сечение плоскостью

Пример. На рисунке показано сечение куба, с ребром *a*, плоскостью ABCD. Точки D и C являются серединами рёбер. Найдём площадь сечения. Решение:



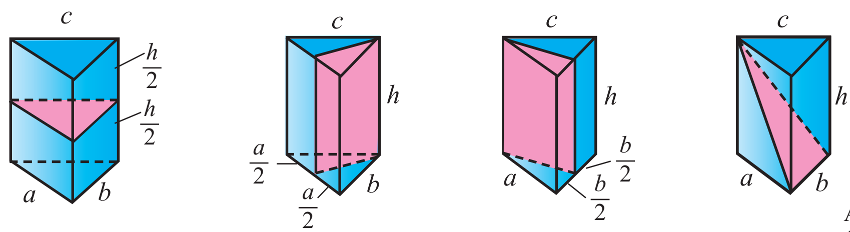
Дано: куб, длина ребра которого равна *a*
точки D и C середины рёбер.
Найдите: S_{ABCD}
Для удобства повернём куб и отметим данные задачи на рисунке. Из ΔBEC по теореме Пифагора:



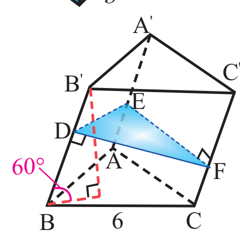
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$
$$x^2 = \frac{5}{4}a^2 \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$$
$$S_{ABCD} = ax = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}a\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2$$

Ответ: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{5}a^2$

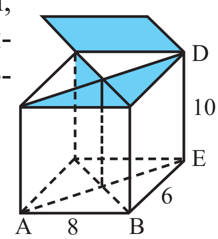
1. По данным рисунка для прямой треугольной призмы: а) найдите площадь сечения; б) сравните объёмы фигур, полученных сечением.



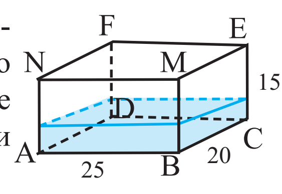
2. Боковое ребро наклонной призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь перпендикулярного сечения, если сторона основания 6 см.



3. Коробка для подарка разделена на 4 части картоном, как показано на рисунке. По заданным размерам, найдите сколько картона потребуется для изготовления коробки?



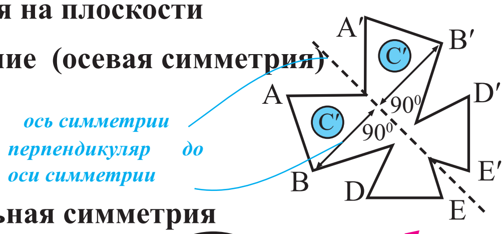
4. Ёмкость для воды имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 15×20×25. Уровень воды в ёмкости на рисунке равен h_1. Если ёмкость перевернуть на грань BCEM, то уровень воды будет на высоте h_2, а если перевернуть на грань ABMN, то уровень воды будет на высоте h_3. Определите сколько кубических метров воды в ёмкости, если $h_1 + h_2 + h_3 = 24$ см.



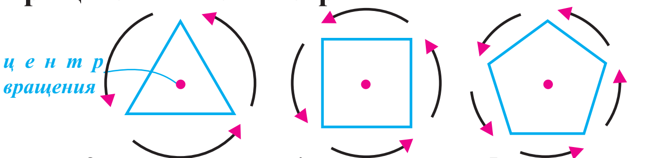
Симметрия в пространстве

Симметрия на плоскости

Отображение (осевая симметрия)

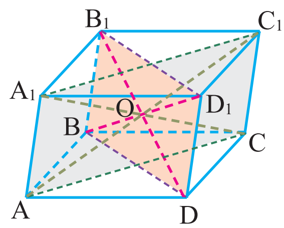


Вращательная симметрия

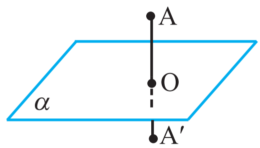


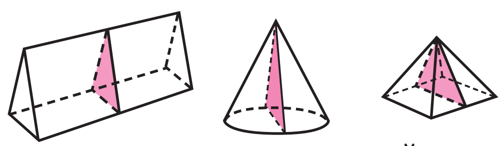
3-го порядка 4-го порядка 5-го порядка

Симметрия в пространстве. В пространственных фигурах также можно наблюдать различную симметрию. Известно, что в параллелепипеде диагональные сечения являются параллелограммами и диагонали BD_1 и DB_1 пересекаясь в точке O делятся пополам. Можно показать, что другие диагонали также пересекаются в точке O и делятся пополам. Значит, точка пересечения диагоналей параллелепипеда является центром его симметрии.

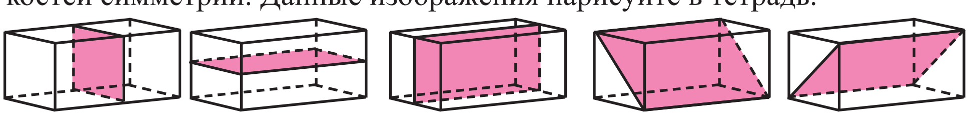


В пространстве, помимо симметрии относительно точки и прямой, рассматривается симметрия относительно плоскости. Если отрезок AA′ пересекает плоскость α посередине, и перпендикулярен плоскости, то говорят, что точки A и A′ симметричны относительно плоскости α. Если точки фигуры, симметричные некоторой плоскости, также принадлежат этой фигуре, то эту плоскость называют плоскостью симметрии, а фигуру называют симметричной относительно плоскости.



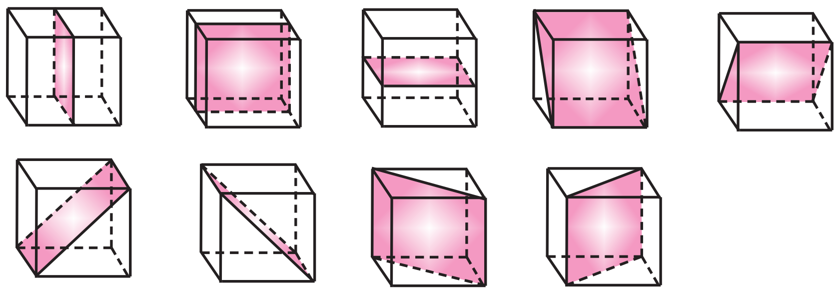


Прямоугольный параллелепипед, у которого все линейные размеры разные, кроме центра симметрии имеет ещё три оси и три плоскости симметрии. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей противоположных граней, называется осью симметрии,а плоскость, проходящая перпендикулярно через середину рёбер называется плоскостью симметрии. Параллелепипед, у которого два линейных размера равны, имеет 5 плоскостей симметрии. Данные изображения нарисуйте в тетрадь.

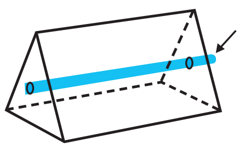


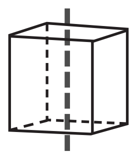
Симметрия в пространстве

Точка пересечения диагоналей куба является его центром симметрии. Прямые, проходящие через середину параллельных рёбер, не принадлежащих одной грани (их всего 6) и прямые, проходящие через центры противоположных граней(их всего три), являются осями симметрии куба. У куба 9 плоскостей симметрии. Они изображены на следующих рисунках.

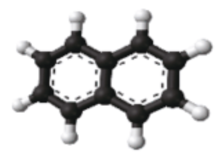


Вращательная симметрия. Вращательная симметрия пространственных фигур похожа на вращательную симметрию плоских фигур. Однако, для объёмных фигур она определяется при помощи оси вращения.



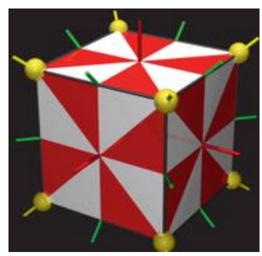


Нафталин: $C_{10}H_8$

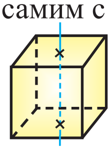


Вращательная и осевая симметрия широко применяется при изучении строения молекул веществ.

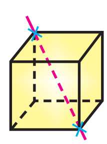
1. На рисунке показаны оси вращения куба. Геометрически заданные оси описаны словами. Покажите возможные варианты изображений для куба на рисунке. Один из возможных вариантов показан на рисунке в качестве примера.



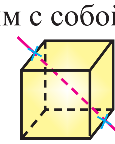
а) Ось симметрии (ось вращения) объединяет центры противоположных граней. Для каждого случая существует 4 совмещения самим с собой;



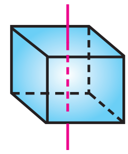
б) Ось вращения - прямая, содержащая диагональ куба. Для каждого случая существует 3 совмещения самим с собой;



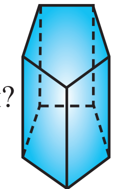
в) Ось вращения - прямая, проходящая через середину двух рёбер противоположных граней. Для каждого случая существует 2 совмещения самим с собой.



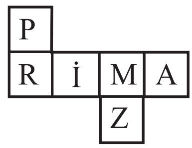
2. Сколько раз должен совершить поворот куб относительно оси, проходящей через центр противоположной грани, чтобы он совместился сам с собой?

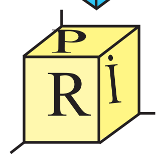


3. Сколько раз должна совершить поворот пятиугольная правильная призма на рисунке, относительно оси, проходящей через центр оснований, чтобы она совместилась сама с собой?



4. Какая буква будет видна на (верхней, боковой, передней) грани куба при повороте в направлении против часовой стрелки на угол 270º вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных граней?

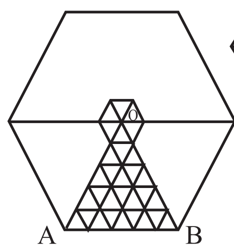


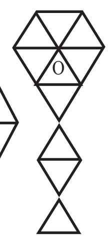


5. Ранее мы выполняли задания по покрытию паркетом площадей плоских фигур. Аналогично, практическое значение имеют задания, где будут создаваться фигуры заполнением объёмов, пространственными фигурами. При этом будут использоваться отражение (осевая симметрия) и вращение.

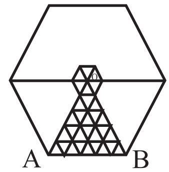
На рисунке показан вид сверху деталей, в виде правильных треугольных призм. Из них сконструирована правильная шестиугольная призма с центром основания O. Сколько деталей понадобилось для этого?

1) Основанием призмы является правильный шестиугольник, состоящий их 6 конгруэнтных треугольников. Каждый треугольник заполнен призмами. По изображению видно, что в один треугольник помещено $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ призм . Для правильной шестиугольной призмы таких призм нужно будет $6 \cdot 25 = 150$.

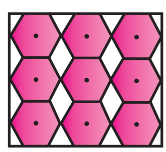




2) Изобразите вид сверху для случая, когда количество маленьких призм будет равно 216. Найдите объём коробки высотой 10 см, если ребро самой маленькой призмы равно 0,5 см.

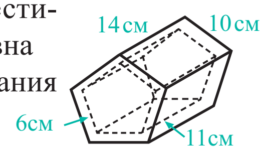


6. В коробку высотой 40 см собраны правильные шестиугольные призмы. На рисунке показан вид сверху. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 4 см. Найдите объём не заполненной части коробки.



Обобщающие задания

1. Коробка на рисунке имеет форму правильной шестиугольной призмы. Сторона внешнего основания равна 10 см, а высота 14 см. Сторона внутреннего основания равна соответственно 6 см, а высота 11 см.



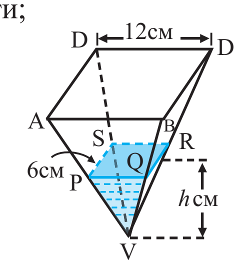
Найдите:

а) площадь полной поверхности внешней поверхности;

б)площадь полной поверхности внутренней поверхности;

в) объём коробки.

2. В пирамиде, основание которой является квадрат имеется 60 см^3 воды. По рисунку найдите:

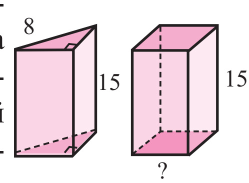


а) высоту уровня воды h ;

б) сколько литров воды надо долить, чтобы наполнить пирамиду?

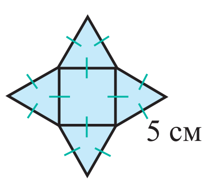
3. Площади поверхностей двух подобных пирамид относятся как $\frac{1}{25}$. Найдите отношение объёмов.

4. Объёмы прямой треугольной и правильной четырёхугольной призм равны. Высота каждой из них равна 15 см. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см. Найдите площадь полной поверхности четырёхугольной призмы.

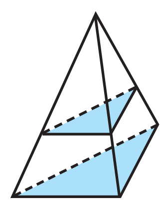


5. **Вопрос открытого типа.** Изобразите по две подобные пирамиды и призмы с коэффициентом подобия 2:5 и запишите полученные размеры.

6. Найдите объём пирамиды на рисунке.

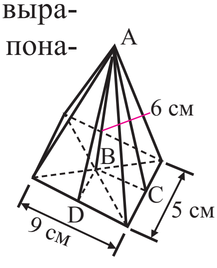


7. Пирамида разделена плоскостью, параллельной основанию, на две равные по объёму части. Найдите высоту верхней части, если высота пирамиды равна 12 см.



8. Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда объёмом 64 см^3. Какими целыми числами должны выражаться размеры коробки, чтобы для её изготовления понадобилось наименьшее количество картона?

9. По рисунку найдите объём и площадь полной поверхности пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник.



9 Показательная и логарифмическая функция

Степень с действительным показателем
Показательная функция
Преобразование графиков показательной функции
Показательная функция. Число *e*
Логарифм числа
Логарифмическая функция
Логарифмическая шкала. Решение задач
Свойства логарифмов
Показательные уравнения
Логарифмические уравнения
Показательные неравенства
Логарифмические неравенства

При археологических раскопках для установления возраста останков рассчитывают количество Углерода 14. При этом приходится решать показательные уравнения.

Древний город, обнаруженный при раскопках в городе Шамкире.

Степень с действительным показателем

Практическое занятие

1) Запишите значение $\sqrt{2}$, полученное при помощи калькулятора.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

2) Задайте последовательность, члены которой являются десятичными приближениями, $\sqrt{2}$ с недостатком:

$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ ...$

3) Запишите в виде степени с основанием 3 для которых показателями являются данные члены:

$3^{1};\ 3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ 3^{1,41421};\ 3^{1,414213};\ ...$

4) При помощи калькулятора вычислите данные члены, заданные в виде степени с действительным показателем.

$$3^{1} = 3$$
$$3^{1,4} \approx 4{,}6555367217$$
$$3^{1,41} \approx 4{,}7069650017$$
$$3^{1,414} \approx 4{,}7276950353$$
$$3^{1,4142} \approx 4{,}7287339302$$
$$3^{1,41421} \approx 4{,}7287858809$$
$$3^{1,414213} \approx 4{,}728801462$$

5) Обратите внимание, что чем ближе показатель степени приближается к $\sqrt{2}$, соответствующая разность между двумя соседними значениями становится меньше и приближается к определённому числу. Это число называется $\sqrt{2}$(иррациональной) степенью числа 3. Вычисление при помощи калькулятора: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288043878$ ...

6) Выполните задание для $2^{\sqrt{3}}$.

Подобным образом рассматривается и степень с иррациональным показателем a^{α}. Если для иррационального числа α, задать последовательность десятичных приближений $\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ ...$, которой соответствует последовательность следующих членов $a^{\alpha_1};\ a^{\alpha_2};\ a^{\alpha_3};\ ...$, то число, к которому стремится данная последовательность, обозначается a^{α}.

Степень с рациональным и иррациональным показателем определена только для положительных оснований. Таким образом, для произвольного действительного числа x вводится понятие степень с действительным показателем a^{x} (здесь $a > 0$).

Считается, что $1^{x} = 1$ для произвольного x и $0^{x} = 0$, при $x > 0$.

Для степени с действительным показателем выполняются известные свойства степени с рациональным показателем.

Для любых действительных чисел x и y при $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$ справедливо следующее:

Степень с действительным показателем

Свойства степеней:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $a^x > a^y$, при $a > 1, x > y$, $a^x < a^y$, при $0 < a < 1, x > y$

7) $a^x > b^x$, при $a > b, x > 0$, $a^x < b^x$, при $a > b, x < 0$

8) если $a^x = a^y$, то $x = y$

Обучающие задания

1. Значения выражений с иррациональной степенью, можно приблизительно вычислить при помощи калькулятора. На граф калькуляторе также можно вычислить степень с иррациональным показателем, нажав клавишу $\wedge$.

Вычислите:

а) $8^{\sqrt{3}}$; б) $5^{-\sqrt{11}}$; в) $(\sqrt{10})^{\sqrt{2}}$; г) 9^{π}; д) $15^{\sqrt{5}}$; е) $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$

2. Напишите по одному примеру, соответствующему следующим правилам.

а) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ б) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ в) $(a^x)^y = a^{xy}$

г) $(ab)^x = a^x b^x$ д) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ е) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3. а) Выразите в виде степени 3: $\frac{3^{2n} \cdot 3^{1+n}}{81^{n-1}}$

б) Выразите в виде степени 2: $\frac{32 \cdot 8^x}{16^x}$

в) Выразите в виде степени 5: $\frac{25^x \cdot 5^{3x}}{125^{2+x}}$

4. При помощи калькулятора найдите приближённые значения данных выражений, с пятью значащими цифрами после запятой.

$2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$, $2^{1,41421}$, $2^{1,414213}$

Данные выражения имеют рациональный показатель. Как при помощи данных выражений можно вычислить значение иррациональной степени $2^{\sqrt{2}}$?

5. Упростите и найдите значение.

а) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; б) $((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$; в) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{3}+2} : 2^{2\sqrt{3}}$;

г) $3^{\sqrt{2}} \cdot 9^{\sqrt{2}+1} : 27^{\sqrt{2}}$; д) $\sqrt[4]{2^{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot 4^{-\sqrt{3}}}$ е) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot 25^{-\sqrt{2}}}$

ж) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{7}+1)^2} : 9^{\sqrt{7}}}$ з) $\sqrt[5]{0{,}2^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot 25^{\sqrt{6}}}$ и) $(2^{(2+\sqrt{2})^2} : 4^3)^{\sqrt{2}}$

6. Сравните.

а) $10^{\sqrt{5}}$ и $10^{\sqrt{3}}$ б) $0{,}1^{\sqrt{3}}$ и $0{,}1^{\sqrt{2}}$

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ г) $(\sqrt{3})^{-4}$ и $(\sqrt{3})^{-2}$.

7. Какое соотношение верно?

а) $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$ б) $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$

в) $1 < 5^{\sqrt{2}} < 5$ г) $4^{\sqrt{2}} < 4^{\sqrt{3}} < 4^{\sqrt{5}}$.

8. Сравните следующие числа с 1.

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$ б) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{4}{3}}$ в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ г) $2^{-\sqrt{3}}$

9. Расположите числа в порядке возрастания.

а) 8^{200}; 9^{150}; 125^{100} б) $(0{,}008)^{50}$; $(0{,}09)^{75}$; $(0{,}5)^{150}$

в) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0{,}1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0{,}2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; г) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{4}}$

10. Вычислите значение выражения.

а) $100^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ б) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

в) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ г) $\left(8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

11. Для положительных значений переменных, запишите в виде степени с рациональным показателем и упростите.

а) $\sqrt{m^6n^4}$ б) $\sqrt[3]{8x^3y^6}$ в) $\sqrt[5]{a^{10}b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}$ г) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

12. Зная, что $b_2 = \sqrt[5]{3}$ и $b_3 = \sqrt[5]{81}$ члены геометрической прогрессии, найдите знаменатель прогрессии.

13. Расположите $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\sqrt{3}}$; $a^{-\sqrt{2}}$; a^0; a^{π} в порядке возрастания, зная что:

а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$

14. Решите уравнения.

а) $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ б) $6x^{\frac{2}{3}} + 12 = 36$ в) $\frac{1}{5}\sqrt{x^3} = 5{,}4$ г) $\sqrt[3]{x^2+2} + 1 = 4$

д) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$ е) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 2$ ж) $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^2+5}$ з) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = 2$

Показательная функция

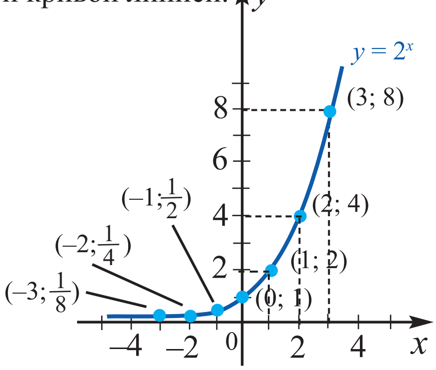
Практическое занятие.

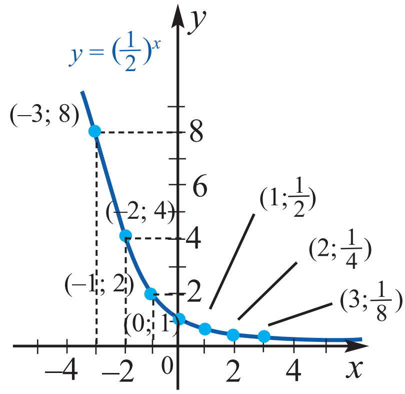
1) Составьте таблицу значений для функций $y = 2^x$ и $y = (\frac{1}{2})^x$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2) На координатной плоскости постройте точки, абсциссы которых соответствуют аргументам, а ординаты значениям функции и соедините сплошной кривой линией.





3) Сравните с “0” значения выражений 2^x и $(\frac{1}{2})^x$ для произвольных значений x.

4) Увеличиваются или уменьшаются значения функции $y = 2^x$ при увеличении значений x ? Увеличиваются или уменьшаются значения функции $y = (\frac{1}{2})^x$ при увеличении значений x?

5) В какой точке графики пересекают ось y ?

6) Сравните графики и запишите их сходные и отличительные черты.

7) Выполните задание для функций $y = 3^x$ и $y = (\frac{1}{3})^x$.

При $a > 0$, $a \neq 1$ функция $y = a^x$ называется показательной функцией.

1) Область определения показательной функции все действительные числа.

$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$

2) Множество значений показательной функции все положительные числа.

$$E(a^x) = (0; +\infty)$$

3) Так как $a^0 = 1$(при $x = 0$), то показательная функция пересекает ось y в точке (0; 1).

4) При $a > 1$функция a^x возрастающая, при $0 < a < 1$ функция a^x убывающая.

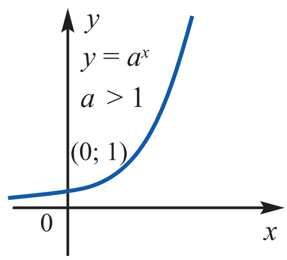
5) Показательная функция не пересекает ось абсцисс и её график расположен выше оси x, т.е. в верхней полуплоскости.

Функция $y = a^x$ и её график называется экспонентой.

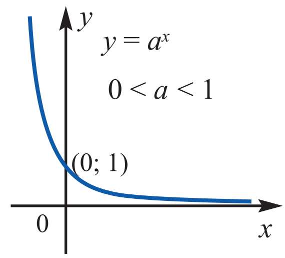
Экспонента при изменении аргумента увеличивается или уменьшается с большой скоростью.

6) При $0 < a < 1$, если x бесконечно возрастают, соответствующие значения y бесконечно убывают и точки графика функции $y = a^x$ неограниченно стремятся к оси абсцисс .
При $a > 1$ и $x \to -\infty$ точки на графике неограниченно стремятся к оси абсцисс.
Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой показательной функции.

Экспоненциально возрастающие и экспоненциально убывающие функции



экспоненциально возрастает



экспоненциально убывает

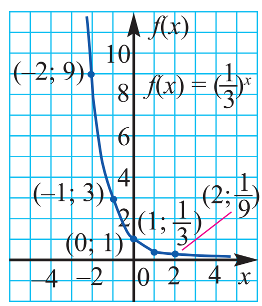
Функция $y = c \cdot a^x$ также называется экспоненциальной функцией.

Например: функцию $y = 8 \cdot 2^x$ можно записать в виде $y = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$.

Пример. По графику функции зададим её уравнение.

Решение: Составим таблицу значений.

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$



Из таблицы значений видно, что при увеличении значений x на 1 единицу, значения y уменьшаются в $\frac{1}{3}$.
Значит, $a = \frac{1}{3}$.Тогда формула функции будет: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Пример. При каких значениях переменных справедливо следующие:

а) равенство $4^x = 64$; б) неравенство $3^x > 9$; в) неравенство $0{,}4^x > 0{,}16$?

Решение: а) запишем равенство $4^x = 64$ в виде $4^x = 4^3$. Здесь по свойству степени с действительным показателем $x = 3$.

б) запишем неравенство $3^x > 9$ в виде $3^x > 3^2$. Здесь ясно, что $x > 2$.

в) запишем неравенство $0{,}4^x > 0{,}16$ в виде $0{,}4^x > 0{,}4^2$ (в виде степени с одинаковым основанием), степени с основанием меньше 1. Получим, что $x < 2$.

Показательная функция

Обучающие задания

1. Постройте графики следующих функций, задав как минимум 3 точки.

1) $f(x)=4^x$ 2) $g(x)=6^x$ 3) $m(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 4) $h(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

а) Покажите является ли функция возрастающей или убывающей.
б) Покажите область определения и множество значений функции.
в) Определите точку пересечения с осью y.

2. Возрастающими или убывающими являются следующие функции:
а) $y=5^x$; б) $y=0{,}3^x$; в) $y=5^{-x}$; г) $y=(\sqrt{2}-1)^x$; д) $y=(\sqrt{5}-1)^{-x}$.

3. Найдите следующие значения функций.

а) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ $f(1), f(2), f(-1), f(-2)$

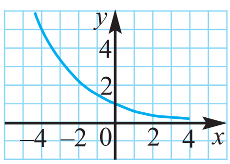
б) $h(x)=(\sqrt{5})^x$ $h(1), h(2), h(-1), h(-2)$

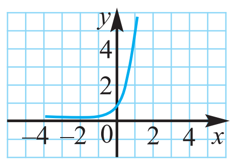
в) $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ $g(0), g(2), g(\sqrt{2}), g(-1)$

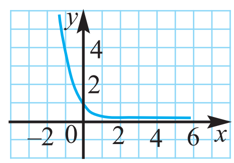
г) $m(x)=2^{3x-1}$ $m(0), m(2), m(\sqrt{2}), m(-1)$

4. Установите соответствие между функцией и графиком.

1) $y=5^x$ 2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 3) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

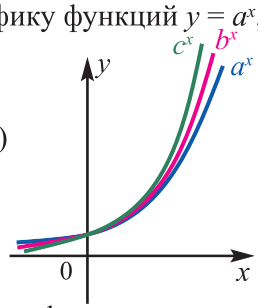
а)


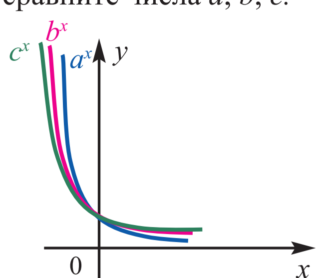
б)


в)


5. Можно ли назвать функции $y=0^x$ и $y=1^x$ показательными функциями? Можно ли назвать показательной функцию $y=(-1)^x$?

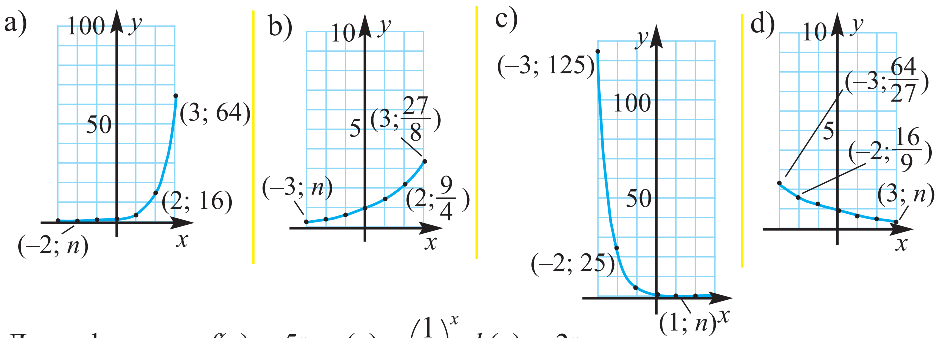
6. По графику функций $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ сравните числа a, b, c.

а)


б)


7. Запишите формулу показательной функции $y=c\cdot a^x$, график которой проходит через точку.
а) (0; –2) и (–2; –32); б) (0; 3) и (1; 15);
в) (0; 7) и (2; 63); г) (0; –5) и (–3; –135);
д) (0; 0,2) и (4; 51,2); е) (0; –0,3) и (5; –9,6);

8. 1) По следующим данным напишите формулу функции в виде $y = a^x$.
2) Составьте таблицу значений и заново постройте график в тетради.



9. Даны функции $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $h(x) = 3^x$.

а) Значение какой функции больше при $x = 5$?

б) Значение какой функции меньше при $x = –5$?

в) При каких значениях x значения функций равны?

10. Зная, что $f(x) = 3{,}2^x$, $g(x) = 0{,}3^x$, сравните:

а) $f(5)$ и $f(6)$; б) $f(0{,}1)$ и $f(0{,}5)$; в) $f(-\sqrt{2})$ и $f(\sqrt{2})$;

г) $g(5)$ и $g(6)$; д) $g(0{,}1)$ и $g(0{,}5)$; е) $g(-\sqrt{2})$ и $g(\sqrt{2})$.

11. Сравните:

а) $(\sqrt{2})^3$ и $(\sqrt{2})^6$; б) $0{,}1^3$ и $0{,}1^{\sqrt{8}}$; в) $4^{-\sqrt{2}}$ и $4^{-\sqrt{3}}$.

12. При каких значениях переменных справедливы равенства?

а) $3^{x+1} = 27$; б) $4^{x-2} = 64$; в) $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$.

13. При каких значениях переменных справедливы равенства?

а) $2^x > 32$; б) $3^x < 27$; в) $0{,}2^x > 0{,}04$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$

14. Решите следующие уравнения графически:

а) $2^x = 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$

15. При помощи графика определите знак корня уравнения.

а) $5^x = 6$; б) $0{,}2^x = 3$; в) $4^x = \frac{1}{3}$; г) $0{,}3^x = 0{,}1$.

16. Устно найдите два значения, удовлетворяющие уравнению: $2^x = x^2$

При помощи графика найдите количество корней уравнения.

17. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и покажите относительно какой оси они симметричны. Обобщите полученный результат.

Показательная функция

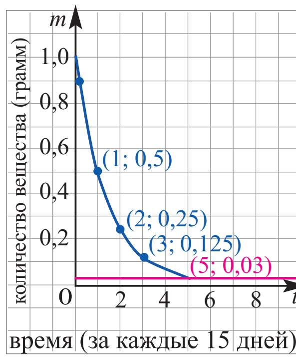
Прикладные задания

Мария Кюри. При радиоактивном распаде вещество делится на несколько частиц (например: электроны,нейтрино,альфа-частицы, фотоны).Радиоактивное вещество, при делении атомов за определённый промежуток времени, теряет половину своей массы. Этот промежуток остаётся неизменным и называется периодом (промежутком) полураспада. В 1898 году Мария Кюри открыла вещества, обладающие высокой радиоактивностью - радий и полоний. За это открытие она была удостоена Нобелевской премии. Изотоп радия называется Radium 226 имеет период полураспада 1620 лет. Продуктом полураспада радия 226 является радон 222 , который может вызвать радиоактивный взрыв.

Закон радиоактивного распада: $m = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$

m_0 - первоначальное количество вещества,
T- период полураспада вещества,
m- количество вещества в момент t, здесь t - время, не может принимать отрицательных значений.

Пример. Промежуток полураспада радия (Ra-225) 15 дней. Зависимость массы(грамм) вещества от времени (за каждые 15 дней), можно смоделировать показательной функцией. График этой функции представлен на рисунке:



а) сколько грамм Ra-225 составляет первоначальное количество вещества? Опишите, письменно, ситуации соответствующие указанным точкам.

б) Запишите область определения и множество значений функции.

в) Запишите зависимость массы вещества от времени в виде функции.

г) Определите приблизительно за сколько времени первоначальное количество вещества Ra-225 уменьшится на $\frac{1}{30}$.

Решение: а) По рисунку видно, что при $t = 0$ график пересекает ось y в точке (0; 1). Т.е. масса первоначального количества вещества равна $m = 1$ г.

б) По графику видно, что область определения функции, то есть значения, которые может принимать t, множество действительных чисел $t \geq 0$. Множество значений функции, то есть значения которые может принимать m, есть множество действительных чисел из промежутка $0 < m \leq 1$. в) Радиактивное вещество за каждые 15 дней распадается наполовину. Значит основание показательной функции равно $\frac{1}{2}$, показатель же выражен переменной t и показывает сколько раз прошло по 15 дней $m(t) = (\frac{1}{2})^t$.

г) Эту информацию можно приблизительно определить по графику или построив таблицу значений. Если первоначальное количество вещества 1 г, то $\frac{1}{30}$ часть приблизительно равна 0,033 г. Отметим эту точку на оси y и проведём горизонтальную прямую, пересекающую график в данной точке. Эта линия пересекает абсциссу графика приблизительно в точке 5. А это значит, что через $5 \cdot 15 = 75$ дней первоначальное количество вещества уменьшится приблизительно на $\frac{1}{30}$ часть.

1. Начальная масса радиоактивного вещества Радий - 226 равна 1г. Закон радиоактивного распада задан формулой $m(t) = (\frac{1}{2})^{t/1620}$. Здесь m - масса радия (г), t - время (год). Найдите массу данного вещества через:
а) 1620 лет; б) 3240 лет; в) 4860 лет.

2. Каждая из следующих ситуаций может быть смоделирована, при помощи показательной функции. Какая из ситуаций является экспоненциально возрастающей ($a > 1$), а какая экспоненциально убывающей ($0 < a < 1$)? а) Количество бактерий в чашке Петри возрастает в 2 раза за каждый час. б) Полураспад изотопа Актиния - 225 равен 10 дням.
в) С увеличением глубины на 1 метр, сила света, падающего на поверхность озера уменьшается на 25%.
г) Количество насекомых увеличивается за день в 3 раза.

3. Банковский счёт даёт ежегодную прибыль в размере 2,5%. Сумма денег на счету через n лет вычисляется по формуле $A = P(1+r)^n$. Здесь P -начальная сумма, r - ежегодный прирост (десятичная дробь).
Если сумма денег на счету изменяется как $A = P(1{,}025)^n$, то:
а) Постройте график соответствующей показательной функции, приняв начальную сумму за 1 манат.
б) По графику сделайте прогноз, через сколько лет начальная сумма вырастет в 3 раза. Зависит ли от начальной суммы трёхкратное увеличение суммы на счету?
в) Финансисты вычисляют время за которое начальная сумма увеличивается в 2 раза при сложном процентном росте по “правилу 72”. Например, чтобы узнать за сколько лет сумма в 100 манат вырастет до 200 манат, надо чтобы произведение количества месяцев и процентной ставки было равно $n \cdot r = 72$.
В соответствии с данным правилом и по графику определите, через сколько, приблизительно, лет сумма с 1 маната вырастет до 2 манат при ставке 2,5%, и сравните полученные результаты.

4. Постройте графики функций $y = 3x$, $y = x^3$ и $y = 3^x$. Для каждой функции запишите область определения и множество значений и нули функции (если они есть). Сравните значения этих функций при $x = 1; 2; 3; 4$. Значения какой функции растут быстрее?

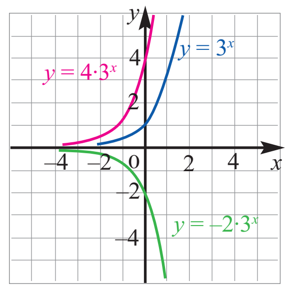
Преобразование графиков показательных функций

Общий вид показательной функции $f(x) = l{\cdot}a^{x-m} + n$

Функция вида $f(x) = a^x$ является основной функцией в семействе показательных функций. Выполняя различные преобразования можно построить графики следующих функций $f(x) = l{\cdot}a^x$, $f(x) = l{\cdot}a^{x-n}$, $f(x) = l{\cdot}a^{x-m} + n$.

- График в $|l|$ раз растягивается от оси x.

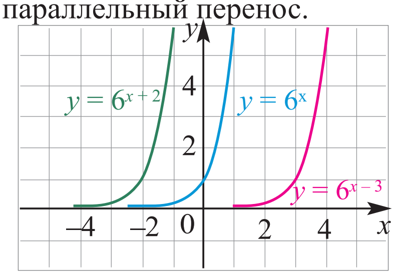
Например, $y = 3^x$ и $y = 4{\cdot}3^x$

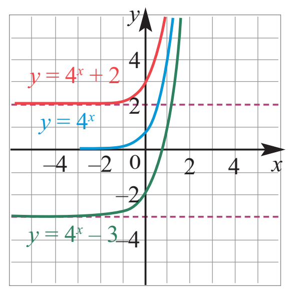


- При $l < 0$ происходит отражение относительно оси x.

Например, $y = 3^x$ и $y = -2{\cdot}3^x$

График функции $f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ можно построить при помощи графика функции $y = l \cdot a^x$ используя параллельный перенос.



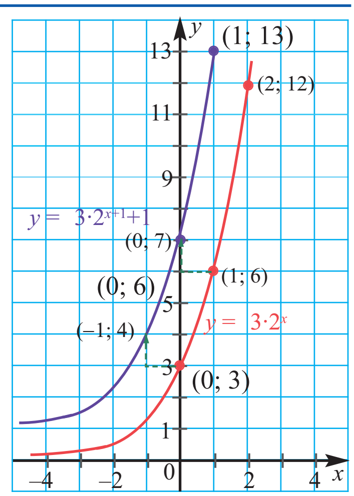


m • смещение налево и направо $\quad$ n • смещение вниз и вверх

Пример. Построим график функции $y = 3{\cdot}2^{x+1} + 1$ при помощи параллельного переноса графика функции $y = 3{\cdot}2^x$.

1. Для функции $y = 3{\cdot}2^x$ отметим точки (0; 3), (1; 6); (2; 12) и соединим эти точки гладкой линией. Прямая $y = 0$ является асимптотой

2. График функции $y = 3{\cdot}2^x$ перенесём параллельно на одну единицу влево ($3{\cdot}2^{x+1}$) и на одну единицу вверх ($3{\cdot}2^{x+1}+1$) (на вектор $\langle -1; 1\rangle$), найдём новые координаты указанных точек и расположим их на координатной плоскости. Соединим эти точки гладкой линией и получим график функции $y = 3{\cdot}2^{x+1} + 1$.



(0; 3) → (–1; 4) $\quad$ (1; 6) → (0; 7) $\quad$ (2; 12) → (1 ; 13)

Прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой.

Преобразование графиков показательных функций

Обучающие задания

1. а) Добавьте в таблице столбец для значений функции $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ и постройте её график.
б) Объясните, как изменение параметров функции $y = l \cdot a^{x-m} + n$ влияет на расположение функции $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ при построении.

$y = 3^x$	$y = 2 \cdot 3^x$	$y = 2 \cdot 3^{x-4}$
$(-1; \frac{1}{3})$	$(-1; \frac{2}{3})$	$(3; \frac{2}{3})$
(0; 1)	(0; 2)	(4; 2)
(1; 3)	(1; 6)	(5; 6)
(2; 9)	(2; 18)	(6; 18)
(3; 27)	(3; 54)	(7; 54)

в) Покажите область определения и множество значений функций $y = 3^x$ и $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$.

2. Постройте графики следующих функций, задав как минимум координаты трёх точек.

а) $y = 2 \cdot 3^x$ б) $y = 5 \cdot 2^x$ в) $y = 0{,}5 \cdot 4^x$
г) $y = 4 \cdot (\frac{1}{3})^x$ д) $y = -(\frac{1}{5})^x$ е) $y = -2{,}5 \cdot 5^x$

3. При смещении графика функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ по вертикали он прошел через точку $(2; \frac{1}{12})$. Запишите формулу, задающую график полученной функции. Запишите параллельный перенос по образцу.

Пример. $f(x) = 3^x$ и $g(x) = 3^{x-4}$
Так как $g(x) = f(x-4)$, то график функции $g(x)$ получается при смещении графика функции $f(x)$ на 4 единицы вправо.

а) $f(x) = 4^x$ и $g(x) = 4^x + 1$
б) $f(x) = -2^x$ и $g(x) = 5 - 2^x$
в) $f(x) = 10^x$ и $g(x) = 10^{-x+2}$

4. Постройте графики функций $y = 4^x$, $y = 4^{x+2}$, $y = 4^{x-3}$. Выскажите своё мнение об области определения, множестве значений и асимптотах данных функций.

5. Функцию $y = 10^x$ можно записать в виде $y = (2 \cdot 5)^x$. Постройте и сравните графики данной функции и функции $y = 2 \cdot 5^x$.

6. Запишите следующие функции в виде $y = l \cdot a^x$.

а) $y = 4^{x+1}$ б) $y = 5 \cdot \sqrt{9^{x-1}}$
в) $y = \sqrt{5 \cdot 2^{3x}}$ г) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3 \cdot 5^{2x}}$

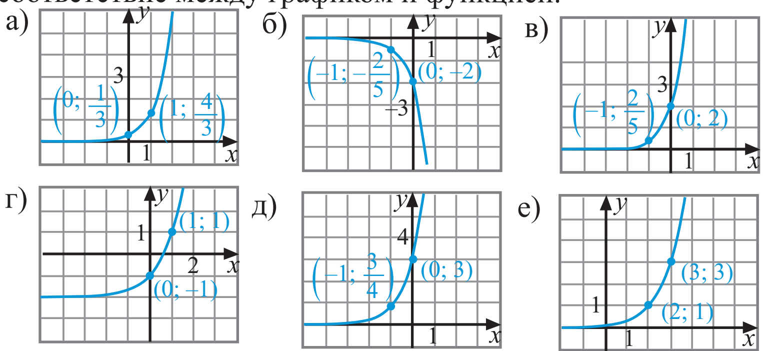
7. Графики следующих функций постройте при помощи параллельного переноса графика показательной функции $f(x) = l \cdot a^x$. Для каждого случая запишите вектор, на который произведён параллельный перенос.

а) $y = 3 \cdot (\frac{1}{3})^{x-1}$ б) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2}$ в) $y = 2 \cdot 2^{x-2}$
г) $y = -3 \cdot 3^{x+2} - 2$ д) $y = 4 \cdot 2^{x-3} + 1$ е) $y = 4 \cdot 2^{x-3} - 4$

Преобразование графиков показательных функций

8. Установите соответствие между графиком и функцией.

1) $y = 2 \cdot 5^x$
2) $y = 3 \cdot 4^x$
3) $y = -2 \cdot 5^x$
4) $y = \frac{1}{3} \cdot 4^x$
5) $y = 3^{x-2}$
6) $y = 3^x - 2$



9. Определите, является ли функция экспоненциально возрастающей или убывающей.

а) $y = 10 \cdot 3{,}5^x$ б) $y = 2 \cdot 4^x$ в) $y = 0{,}4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

г) $y = 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$ д) $y = 30^{-x}$ е) $y = 0{,}2 \cdot 5^{-x}$

10. В реальной жизни, при ежегодном увеличении величины на постоянный процент, её состояние через t лет можно оценить формулой $y = a(1 + r)^t$, при уменьшении - формулой $y = a(1 - r)^t$.Здесь a - начальное количество, r - процент увеличения (уменьшения) (десятичная дробь), t -количество лет.

При помощи данных формул решите следующие задания.

Пример. Цена автомобиля купленного за 24 000 манат ежегодно снижается на 12%. Запишем зависимость между количеством лет (t) эксплуатации автомобиля и его ценой.

Решение. В формуле $y = a(1 - r)^t$ примем $a = 24000$, $r = 12\% = 0{,}12$, $1 - r = 0{,}88$. Тогда данную ситуацию можно смоделировать показательной функцией $y = 24000 \cdot (0{,}88)^t$.

а) В 1993 количество пользователей Интернетом составляло 1 313 000. В течении 10 лет их количество увеличилось на 100% . Запишите показательную функцию, показывающую количество пользователей через *t лет.* Найдите сколько пользователей Интернетом будет через 5 лет? Сколько людей пользовалось Интернетом в 2000 году?

б) Сумма в 1000 манат внесена в банк под сложную процентную ставку в размере 8%. Какая сумма будет на банковском счёте через 6 лет?

в) Организм человека освобождается от кофеина за час на 12%. Задайте формулой показательную функцию выражающую количество кофеина оставшегося в организме человека, если он выпил кофе, содержащее 120 мг кофеина.

11. Найдите область определения и множество значений следующих функций.

а) $y = 3^x + 2$; б) $y = 2^x - 3$; в) $y = 8 \cdot 2^x + 2$;

г) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$; д) $y = 3 \cdot 3^{x-1} + 3$; е) $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$.

Показательная функция. Число e

Исследование. Число e.

Представьте, что вы вложили в банк 1 манат, под сложные проценты с процентной ставкой равной 100%. В течении года вы произвели вычислений n раз, подставив в формулу сложного процентного роста следующие данные $S_0 = 1$, $r = 100\% = 1$, $t = 1$.

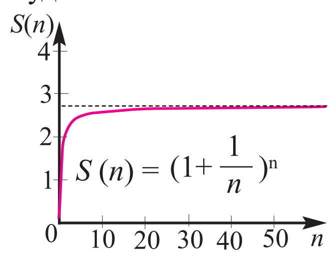
$$S = S_0\,(1+\frac{r}{n})^{nt} = 1\cdot\,(1+\frac{1}{n})^{n\cdot 1} = (1+\frac{1}{n})^{n}$$

Вычислите значения функции и установите, к какому числу приближается значение функции $(1+\frac{1}{n})^n$ при различных значениях n.

Условие вычисления	n	$S(n) = (1+\frac{1}{n})^n$	
Год	1	$S(n) = (1+\frac{1}{1})^1$	2
Полгода	2	$S(n) = (1+\frac{1}{2})^2$	2,25
Квартал	4	$S(n) = (1+\frac{1}{4})^4$	2,4414
Месяц	12	$S(n) = (1+\frac{1}{12})^{12}$	2,4883
День	365	$S(n) = (1+\frac{1}{365})^{365}$	2,7048
Час	8760	$S(n) = (1+\frac{1}{8760})^{8760}$	2,7146
			2,7181

Как видно, если банк будет чаще вычислять процент для вложенной суммы, то прибыль увеличится. Однако, отношение ежедневных вычислений к ежемесячным даёт прибыль 10 гяпик. Если даже банк будет находить процент для денег на счету ежесекундно , то и в данном случае разница между начислением процентов ежечасно или ежедневно будет незначительна.

Из графика функции $S(n) = (1+\frac{1}{n})^n$ построенного при помощи графкалькулятора видно, что при $n \to \infty$ функция $S(n)$ имеет горизонтальную асимптоту.



Число e

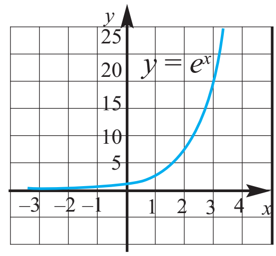
Исследование показывает, что при увеличении значений n значение выражения $(1+\frac{1}{n})^n$ колеблется между 2,71 и 2,72. Это число записывается буквой e и имеет значение $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$. Число e, так же как и число π является иррациональным числом. Эти числа называются **трансцендентными числами**. Трансцендентным называется число, которое не является корнем уравнения n степени с целыми коэффициентами.

Экспоненциальное возрастание или убывание по основанию e задаётся формулой $N = N_0e^{kt}$. Здесь N_0 - начальное значение, t -время. k -постоянное число.

Показательная функция. Число *e*

График функции $y = e^x$

Для построения графика функции $y = e^x$ можно использовать различные граф калькуляторы. Например, (http://www.meta-calculator.com/online) или как показано на рисунке, при помощи программы Geometer's Sketchpad®.



1. Найдите значения выражений с точностью до 4 знаков после запятой. Используйте кнопку e^x интернет калькулятора.
https://www.eeweb.com/toolbox/calculator

а) e^{-2} б) $e^{-0,23}$ в) e^{0}

2. При помощи графкалькулятора постройте график функции $y = e^x$. Изобразите, схематично, графики следующих функций, при помощи преобразования графика функции $y = e^x$.

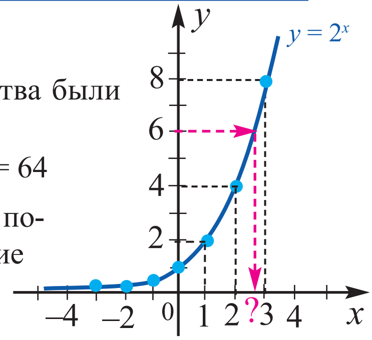
а) $y = 2\cdot e^{2x}$ б) $y = e^{-x}$ в) $y = 3e^{-x}$

3. Вещество DDT ($C_{14}H_9Cl_{15}$) было впервые изобретено шведским учёным Паулем Мюллером, за что ему была присвоена Нобелевская премия. При помощи DDT , обрабатывая окрестности лекарственными пестицидами в послевоенный период, были уничтожены такие болезни как тиф и малярия. Однако, исследования показывают, что данное вещество оказывает негативное действие на организм человека. Если в 1973 году было использовано 1×10^9 кг DDT для дезинфекции определённых площадей, при $k = -0,023$:
а) запишите формулу , показывающую остаток данного вещества в заданный год в виде $N = N_0e^{kt}$;
б) какой остаток вещества сохранится в 2020? Используйте калькулятор.

4. При проведении опыта было установлено ,что количество бактерий N в банке через время t часов, можно посчитать по формуле $N = 100\ e^{0,69t}$. Найдите:
а) сколько бактерий было в банке изначально;
б) сколько бактерий будет в банке через 5 часов?

5. Сумма в размере 5000 манат была положена на счёт в банк под сложный процент с процентной ставкой равной 12% в год на 25 лет. Вычислите прибыль, при непрерывном подсчёте по формуле $S = S_0e^{rt}$ и прибыль при подсчёте по формуле $S = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ 2 раза в год($n = 2$). При каком подсчёте прибыль получается больше и насколько?

Логарифм числа



Исследование

1) Запишите вместо x такие числа, чтобы равенства были верными.

а) $2^x = 16$ б) $3^x = 9$ в) $4^x = 64$

2) При каких значениях аргумента функция $y = 2^x$ получает значение равное 6? Является ли это значение x единственным?

3) Между какими двумя целыми числами находятся значения x удовлетворяющие равенствам?

а) $2^x = 24$ б) $3^x = 18$ в) $4^x = 56$

Логарифм

Логарифмом по основанию a числа b, называется такое число, что при возведении числа a в эту степень получится число b.

Это записывается так $y = \log_a b$. Здесь, при $a \neq 1$ числа a и b положительные действительные числа.

показатель

$y = \log_a x$ $a^y = x$

основание

Запись $y = \log_a x$ является логарифмической записью равенства $a^y = x$ и наоборот запись $a^y = x$ является экспоненциальной записью для равенства $y = \log_a x$. То есть записи $a^y = x$ и $y = \log_a x$ эквивалентны.

• $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$ • $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$.

• $\log_a a^y = y$, так как $a^y = a^y$ • $a^{\log_a x} = x$, так как $\log_a x = \log_a x$

Равенство $\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$ называется основным логарифмическим тождеством.

Пример 1. Заменим логарифмическую запись экспоненциальной.

а) $\log_2 16 = 4$ б) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$ в) $\log_8 1 = 0$

Решение: логарифмическая запись: экспоненциальная запись:

а) $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$

б) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$ $10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$

в) $\log_8 1 = 0$ $8^0 = 1$

Пример 2. Найдём значение логарифмического выражения.

а) $\log_3 27$ б) $\log_a a$ в) $\log_5 \sqrt[4]{5}$

Решение:

Обозначим $\log_3 27 = x$

$3^x = 27$ *экспоненциальная форма*

$3^x = 3^3$, $x = 3$ *по свойству степени*

$\log_a a = x$

$a^x = a$

$x = 1$

$\log_5 \sqrt[4]{5} = x$

$5^x = \sqrt[4]{5}$

$x = \dfrac{1}{4}$

Логарифм числа

Обучающие задания

1. Запишите равенства в эквивалентной логарифмической форме

а) $3^4 = 81$ б) $8^{1/3} = 2$ в) $0,5^{-2} = 4$ г) $b^y = x$

д) $e^x = y$ е) $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ ж) $(\frac{5}{2})^{-1} = \frac{2}{5}$ з) $8^{-2} = \frac{1}{64}$

2. Запишите равенства в эквивалентной экспоненциальной форме

а) $\log_5 625 = 4$ б) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$ в) $\lg(0,0001) = -4$ г) $\log_{25}(\frac{1}{5}) = -\frac{1}{2}$

д) $\log_b 15 = x$ е) $\log_b 82 = y$ ж) $\log_3 5 = x$ з) $\log_2 7 = x$

Логарифм чисел по основанию 10 и e соответственно обозначаются как lg и ln. Логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом, по основанию e - натуральным логарифмом.

$\log_{10} 0,001 \Rightarrow \lg 0,001$ $\log_e c \Rightarrow \ln c$

При вычислении логарифмов можно пользоваться калькулятором. Например, виртуальным калькулятором по адресу http://web2.0calc.com

3. Вычислите.

а) $\lg 0,001$ б) $\lg(6,3 \cdot 10^5)$ в) $\lg(0,00025)$ г) $\ln(e^3)$ д) $\ln(8)$

4. Не пользуясь калькулятором, найдите значение выражений.

а) $\log_7 49$ б) $\log_3 27$ в) $\lg 0,1$ г) $\log_2(\frac{1}{16})$

д) $\log_{16} 4$ е) $\log_8 2$ ж) $\log_{\frac{7}{2}} 1$ з) $\log_{0,5} 2$

и) $\log_3 3^5$ к) $\log_9 9^3$ л) $\lg 10$ м) $\log_7 1$

5. 1) На примерах объясните, невозможность существования логарифмов с основаниями 0;1 или отрицательным числом в основании.

2) Имеют ли смысл выражения?

а) $\log_{-3} 9$; б) $\lg(-10)$; в) $\log_1 3$; г) $\ln 7$; д) $\log_3 16$.

6. Вместо a и b запишите последовательные целые числа, чтобы неравенство было верным.

а) $a < \log_2 48 < b$ б) $a < \log_3 100 < b$ в) $a < \log_5 90 < b$

7. Найдите значение выражений при помощи основного логарифмического тождества.

а) $2^{\log_2 8}$ б) $10^{\lg 2}$; в) $3^{1 + \log_3 2}$; г) $10^{2 - \lg 4}$;

д) $2^{3 \log_2 5}$; е) $5^{2 \log_5 3}$; ж) $4^{\log_2 3}$; з) $16^{\log_4 7}$;

8. Вычислите.

а) $(1 + 3^{\log_3 5})^{\log_6 2}$; б) $49^{1 - \frac{1}{2}\log_7 3}$; в) $(7 - 5^{\log_5 3})^{1 + \log_2 3}$.

9. Найдите неизвестное в равенстве

а) $\log_2 x = -1$ б) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ в) $\log_x 25 = 2$ г) $\log_x \frac{1}{4} = -2$

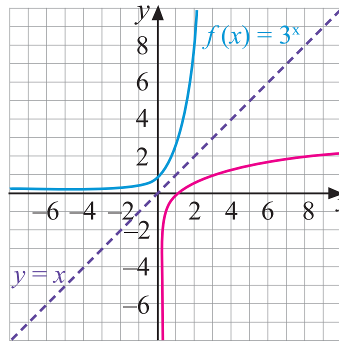
10. Статистика показывает, что начиная с 1995 года количество населения в мире ежегодно увеличивается на 1,27% . В 2011году количество населения достигло 7 миллиардов человек. Сколько человек будет, приблизительно, в мире в 2020 году при том же темпе роста населения?

Логарифмическая функция

Исследование. Постройте в тетради таблицу значений и график функций $f(x) = 3^x$ обратной ей функции $f^{-1}(x)$. Запишите своё мнение о полученных функциях.

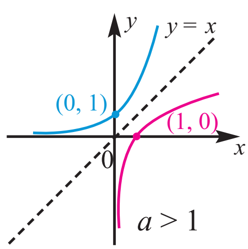
$f(x) = 3^x$	
x	y
–3	$\frac{1}{27}$
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

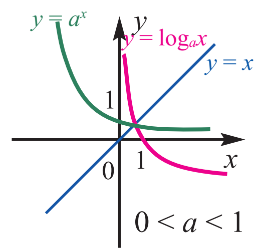
$f^{-1}(x)$	
x	y
$\frac{1}{27}$	–3
$\frac{1}{9}$	–2
$\frac{1}{3}$	–1
1	0
3	1
9	2
27	3



Логарифмическая функция

Для каждого значения области определения функции $y = a^x$ соответствует единственное значение из области значений, т.е. для функции $y = a^x$ существует обратная функция $x = \log_a y$.





Значит, если график функции $y = a^x$ отразить симметрично относитнльно прямой $y = x$, то получим график функции $y = \log_a x$.

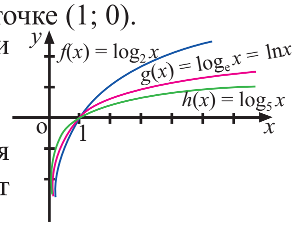
1) Область определения логарифмической функции все положительные числа: $D(\log_a x) = (0; +\infty)$

2) Множество значений логарифмической функции множество всех действительных чисел: $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$

3) При $a > 1$логарифмическая функция является возрастающей, при $0 < a < 1$ убывающей.

4) График функции $y = \log_a x$ пересекает ось абсцисс в точке (1; 0).

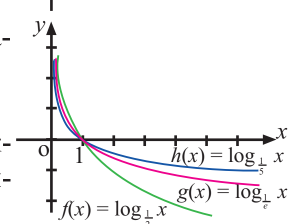
В качестве примера для $a > 1$ на рисунке даны графики функций $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_5 x$.



Постройте графики в тетради.

Если $a > 1$, то при $0 < x < 1$ логарифмическая функция принимает отрицательные значения, при $x > 1$ принимает положительные значения.

В качестве примера для $0 < a < 1$ на рисунке даны графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{e}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.



Постройте графики в тетради.

Если $0 < a < 1$, то при $0 < x < 1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, при $x > 1$ принимает отрицательные значения.

Логарифмическая функция

Обучающие задания

1. В одной системе координат постройте графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ для следующих значений a.

а) $a = 2$ б) $a = 3$ в) $a = 4$ г) $a = \frac{1}{2}$ д) $a = \frac{1}{3}$

2. С помощью каких симметричных преобразований из графика функции $y = \log_2 x$ можно получить график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Объясните, построив графики функций в одной системе координат.

3. Для следующих функций запишите формулы обратных функций. Постройте графики заданных и обратных функций. Для обратной функции определите: • области определений и значений; • уравнение асимптоты; • координаты точек пересечения с осями координат.

а) $y = 5^x$ б) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

4. График функции $y = \log_3 (x + 9) + 2$ получается из графика функции $y = \log_3 x$ параллельным переносом на вектор $\langle -9; 2\rangle$. Из графика какой функции и при помощи какого смещения получаются следующие функции?

а) $y = \log_2 x + 3$ б) $y = \log_2 (x + 3)$ в) $y = \log_3 (x - 3) - 4$

5. Возрастают или убывают следующие функции? а) $y = \log_5 x$ б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. Сравните:

а) $\log_2 5$ и $\log_2 7$ б) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ и $\log_{\frac{1}{2}} 3$ в) $\log_2 3$ и $\log_5 4$

7. Точка $(\frac{1}{8}; -3)$ принадлежит графику функции $f(x) = \log_a x$, точка $(4; k)$ принадлежит графику обратной функции $f^{-1}(x)$. Найдите значение k.

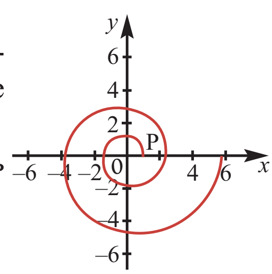
8. Определите знак числа: а) $\log_5 2$; б) $\log_{0,2}\sqrt{3}$; в) $\log_3 0,2$; г) $\log_{0,4} 0,6$

9. Логарифмическая спираль получатся при повороте точки P(1; 0) в направлении против часовой стрелки на угол φ радиан. В это время расстояние от точки P до начала координат r определяется формулой $r = e^{0,14\varphi}$.

а) Найдите расстояние от точки P до начала координат при повороте на угол 2π. Результат округлите до сотых.

б) При помощи логарифма запишите зависимость между r и φ.

в) Найдите значения φ при $r = 12$.

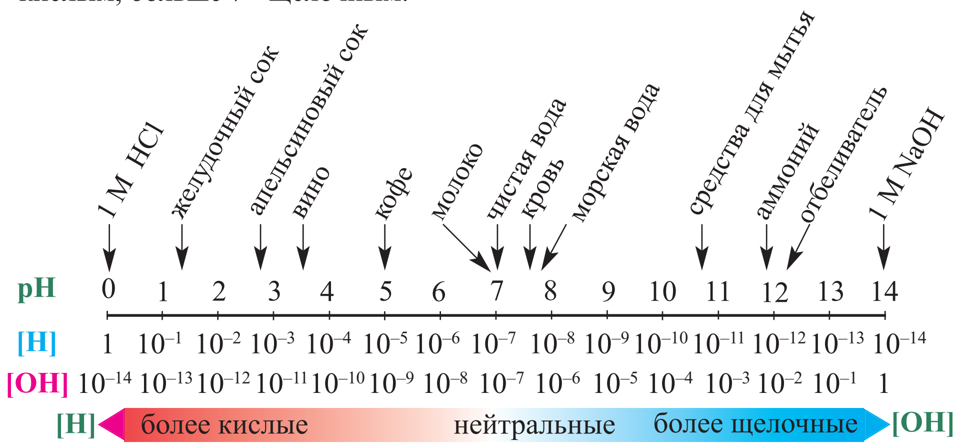


Логарифмическая шкала. Решение задач

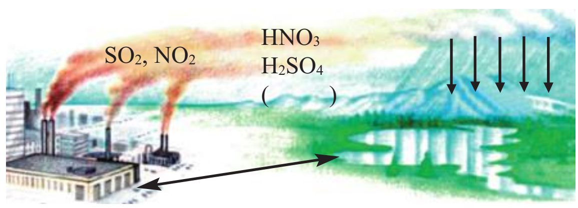
1. Химия - экология. Показатель pH-мера активности ионов водорода в растворе, количественно выражающая его кислотность. Для вычисления уровня pH в растворах используется формула

$$pH = -\lg[H^+]$$

Здесь, H^+ концентрация ионов в *моль/л*. Из формулы следует, что при увеличении показателя pH на 1 единицу, концентрация ионов в растворе увеличивается в 10 раз. По шкале pH значения показателя pH изменяются от 0 до 14. Если pH равно 7, то раствор считается нейтральным, меньше 7 - кислым, больше 7 - щелочным.



а) Уровень pH в нормальной дождевой воде равен 5,6. Однако в результате загрязнения экологии во многих местах идут дожди с повышенной кислоностью. Если в дождевой воде уровень концентрация уровня ионов водорода будет 0,0002 *моль/л*, то вычислите значение показателя pH.



$pH = -\lg[H^+]$

б) Определите концентрацию $[H^+]$ в воде, если показатель pH равен 5,6.

2. Физика. Звуковые волны. Громкость звука измеряется в децибелах и вычисляется по формуле $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Здесь I - интенсивность звука (ватт/м^2), I_0 - наименьшая интенсивность звука, которую различает человеческое ухо (принято 10^{-12} ватт/м^2). Человеческое ухо может различать звуки в очень большом диапазоне от 0 dB (тишина) до 180 dB.

а) Интенсивность звука радио в 4000 раз больше наименьшего значения интенсивности звука, различаемого человеческим ухом. Сколько децибел составляет громкость звука радио?

б) Таир утверждает, что громкость звука интенсивностью в $4\cdot10^{-8}$ ватт/м^2 в 2 раза выше громкости звука интенсивностью $2\cdot10^{-8}$ ватт/м^2. Как вы думаете, прав ли Таир?

Логарифмическая шкала. Решение задач

3. **Землетрясение.** В 1935 году американский сейсмолог Чарлз Рихтер вывел формулу $M = \lg\frac{A}{A_0}$ и создал логарифмическую шкалу определения силы землетрясения (она называется шкалой Рихтера). Здесь M - сила землетрясения (в баллах), A - максимальная амплитуда волны (в микронах), зарегистрированная на сейсмографе, A_0 - амплитуда (принято 1 микрон (10^{-6} м)) самой маленькой сейсмической волны зарегистрированной сейсмографом (её называют “нулём землетрясения”). Формулу $M = \lg\frac{A}{A_0}$ можно записать иначе, как $A = A_0 10^M$. Таким образом, по шкале Рихтера, амплитуда сейсмической волны в 4 балла в 10 раз больше амплитуды сейсмической волны в 3 балла.

а) Сколько баллов, по шкале Рихтера, составила сила землетрясения, если максимальное значение амплитуды (A) в $10^{7,1}$ раз больше значения A_0?

б) Во сколько раз амплитуда землетрясения силой в 4,7 балла, больше амплитуды землетрясения силой 4 балла?

в) В1906 году в Сан Франциско произошло землетрясение силой 8,3 баллов по шкале Рихтера. В тот же год в городе Эквадоре в Колумбии произошло землетрясение, амплитуда которого была в 4 раза больше. Определите силу землетрясения по шкале Рихтера в городе Эквадор в Колумбии.

г) 28 июля 1976 года в результате сильнейшего землетрясения в Китае с силой 8 баллов по шкале Рихтера погибло 240000 человек, в 1990 году землетрясение в Иране с силой 7,4 балла, по шкале Рихтера, унесло жизни 50000 человек. Сравните амплитуды этих землетрясений.

4. В комнате каждая из трёх групп людей, при разговоре, воспроизводит звук интенсивностью 1,4 ×10–7 ватт/м^2. Сколько децибел составляет полученный при разговоре звук?

5. Пусть, сумма денег на счету в размере 1000 манат изменяется в экспоненциальной зависимости. За 7 лет сумма увеличилась в 2 раза. Вычислить сумму через t лет можно по формуле $A(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{7}}$.
Здесь t количество лет, $A(t)$ - сумма на счету.

а) Сколько манат будет на счету через 5 лет; 10 лет?

б) Найдите значения A(0) и A(8) и опишите соответствующую реальную ситуацию.

6. **Биология.** Биологи по длине (l) следа слона, могут, приблизительно, определить его возраст (a). Для этого они используют формулу $l = 45 - 25{,}7e^{-0{,}09a}$. Найдите возраст слона, если длина следа равна 28 см; 36 см.

Свойства логарифмов

Исследование. 1) Покажите, что $\lg(1000 \cdot 100) \neq (\lg 1000)\cdot(\lg 100)$.
2) Вычислите. Сравните результаты.

а) $\log_2 4 + \log_2 8$ и $\log_2 32$
б) $\log_3 3 + \log_3 27$ и $\log_3 81$
в) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$ и $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Обобщите в виде правила для $\log_a b + \log_a c$. b и c положительные действительные числа.

3) Вычислите.

а) $\log_2 64 - \log_2 2$ и $\log_2 32$
б) $\log_3 27 - \log_3 9$ и $\log_3 3$
в) $\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ и $\log_{\frac{1}{2}} 16$

Обобщите в виде правила для $\log_a b - \log_a c$. b и c положительные действительные числа.

4) Вычислите.

а) $3\cdot\log_2 4$ и $\log_2 64$
б) $2\cdot\log_3 \frac{1}{9}$ и $\log_3 \frac{1}{81}$
в) $2\cdot\lg 100$ и $\lg 10000$

Обобщите в виде правила для $b \cdot \log_a c$. b и c положительные действительные числа.

5) В тетради запишите словами свойства степеней.
Объясните каждое свойство на двух примерах.

- произведение степеней: $c^x \cdot c^y = c^{x+y}$
- отношение степеней: $\frac{c^x}{c^y} = c^{x-y}$, $c \neq 0$
- возведение степени в степень: $(c^x)^y = c^{xy}$

Свойства логарифмов

1. Логарифм произведения: $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$
Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов множителей. Здесь $c \neq 1$ и $c > 0$, x и y - положительные действительные числа.

2. Логарифм частного: $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$
Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов. Здесь $c \neq 1$ и $c > 0$, x и y - положительные действительные числа.

3. Логарифм степени: $\log_c x^y = y\cdot\log_c x$
Логарифм степени числа равен произведению степени и логарифма этого числа. Здесь $c \neq 1$ и $c > 0$, x - положительное действительное число.

Свойства логарифмов

Свойство 1. $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$
Доказательство свойства 1:
Обозначим $\log_c x = m$ и $\log_c y = n$.

$x = c^m$ и $y = c^n$	*применим экспоненциальную запись*
$xy = (c^m)\cdot(c^n)$	*найдём произведение чисел x и y*
$xy = c^{m+n}$	*применим свойство произведения степеней*
$\log_c xy = m + n$	*применим логарифмическую запись*
$\log_c xy = \log_c x + \log_c y$	*учтём значения m и n*

Свойство 2. $\log_c \dfrac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$
Доказательство свойства 2:
Обозначим $\log_c x = m$ и $\log_c y = n$.

$x = c^m$ и $y = c^n$	*применим экспоненциальную запись*
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{c^m}{c^n}$	*найдём частное чисел x и y*
$\dfrac{x}{y} = c^{m-n}$	*применим свойство частного степеней*
$\log_c \dfrac{x}{y} = m - n$	*применим логарифмическую запись*
$\log_c \dfrac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$	*учтём значения m и n*

Свойство 3. $\log_c x^y = y\cdot\log_c x$
Доказательство свойства 3:
Обозначим $\log_c x = m$.

$x = c^m$	*применим экспоненциальную запись*
$x^y = (c^m)^y$	*применим свойство равенства*
$x^y = c^{my}$	*применим свойство возведения степени в степень*
$\log_c x^y = m\,y$	*применим логарифмическую запись*
$\log_c x^y = (\log_c x)\cdot y$	*учтём значение m*
$\log_c x^y = y\cdot\log_c x$	*применим переместительное свойство умножения*

Обучающие задания

1. Вычислите значения выражений, при помощи свойств логарифмов.

а) $\log_2 (64\cdot32)$ б) $\log_3 \dfrac{0,(3)}{81}$ в) $\log_5 (125\cdot625)$

г) $\log_6 3 + \log_6 12$ д) $\lg 2 + \lg 5$ е) $\log_{0,5} 6,4 + \log_{0,5} 10$

ж) $\log_2 48 - \log_2 3$ з) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ и) $\lg 0,25 - \lg 25$

к) $\log_2 \sqrt[4]{8}$ л) $\log_3 (9\cdot 27)$ м) $\lg \sqrt{10^3}$ н) $\log_{0,5} \sqrt[4]{8}$

о) $\dfrac{\log_5 8}{\log_5 32}$ п) $\dfrac{\log_3 125}{\log_3 25}$ р) $\dfrac{\log_7 6}{\log_7 2 + \log_7 18}$ с) $\dfrac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 13 - \lg 130}$

2. Используя свойства логарифмов, запишите данные выражения через логарифмы положительных чисел x, y и z .

Пример 1. $\log_4 xy\sqrt{z} = \log_4 x + \log_4 y + \log_4 z^{\frac{1}{2}} = \log_4 x + \log_4 y + \dfrac{1}{2}\log_4 z$

а) $\log_6 \dfrac{x}{y}$ б) $\log_5\sqrt{xy}$ в) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{x^2}}$ г) $\log_7 \dfrac{x^5 y}{\sqrt{z}}$

д) $\log_7 xy\sqrt[3]{z}$ е) $\log_5 (xyz)^8$ ж) $\log_3 \dfrac{x^2}{y\sqrt[3]{z}}$ з) $\log_3 x\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

3. Используя свойства логарифмов запишите в виде логарифма какого-либо числа вида $\log_a N$.

Пример 2.
$\log_5 6 + \log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \dfrac{6\cdot 10}{2} = \log_5 30$

а) $\log_2 3 + \log_2 5$	б) $\log_3 16 - \log_3 2$	в) $3\cdot\log_5 4$
г) $2 \lg 3 - 3 \lg 2$	д) $\lg 216 - \lg 36$	е) $\lg 16 + \lg 4$
ж) $5 \log_3 2 + 2 \log_3 5$	з) $\lg 12 - 2 \lg 2 + \lg 3$	и) $3 \log_2 3 + 2 \log_2 5 - \log_2 6$

4. Запишите в виде логарифма следующие выражения, зная, что переменные могут принимать только положительные значения.

Пример 3. $5 + \log_2 x = \log_2 2^5 + \log_2 x = \log_2 32 + \log_2 x = \log_2 32x$

а) $\log_x x + \log_x 10$ б) $\log_2 a + \log_2 b$

в) $\log_2 x - 5 \log_2 y$ г) $\dfrac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 y$

д) $\dfrac{1}{2} \lg x + 3\lg y$ е) $\dfrac{2}{3} \log_5 x + 4\log_5 y - 3\log_5 z$

ж) $3 \log_3 x^3 - (\log_3 x^2 + 5 \log_3 x)$ з) $\log_7 x^2 + \log_7 x - 5 \log_7 x$

и) $\ln x + 2\ln y - 2\ln z$ к) $\dfrac{1}{2} \log_3 x^{10} - \dfrac{2}{5}\log_3 x^5$

5. Упростите, при всех допустимых значениях переменных.

а) $\log_2(x^2 - 9) - \log_2(2x - 6)$ б) $\log_5(x - 1) - \log_5(x^2 + 2x - 3)$

6. Зная, что $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$, выразите через a и b следующие логарифмы: а) $\log_5 6$; б) $\log_5 12$; в) $\log_5 15$; г) $\log_5 30$.

7. Найдите значение выражения $\lg \dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{c}$ при $\lg a = 3$, $\lg b = 12$, $\lg c = 8$.

8. 1) Найдите значение выражения:

а) 3^k , если $k = \log_2 40 - \log_2 5$;
б) 7^n, если $n = 3 \log_8 4$

2) Упростите: а) $e^{\ln 10x^3 - \ln 2x}$ б) $3^{2\log_3 x - \log_3 2x}$

9. Если $\lg 5 \approx 0{,}699$ и $\lg 15 \approx 1{,}176$, найдите значения следующих выражений

а) $\lg 3$ б) $\lg 75$ в) $\lg 12$ г) $\lg 45$

Переход к новому основанию

По основному логарифмическому тождеству и свойству степени логарифма имеем: $\log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a$

Отсюда: $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ В частном случае при $c = b$, $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

На многих калькуляторах существуют кнопки для вычисления только десятичного логарифма (lg) и натурального логарифма (ln). Поэтому, возникает необходимость представлять логарифмы в виде десятичных и натуральных логарифмов.

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Пример 1. Запишите в виде : а) десятичного; б) натурального логарифма и вычислите.

$$\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3} \approx \frac{0{,}845}{0{,}477} \approx 1{,}771 \qquad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1{,}946}{1{,}099} \approx 1{,}771$$

10. Вычислите, приведя к десятичному или натуральному логарифму.

$\log_5 7$ $\log_7 12$ $\log_3 16$ $\log_9 25$ $\log_6 24$
$\log_2 5$ $\log_5 9$ $\log_3 17$ $\log_5 32$ $\log_4 19$

11. 1) При помощи формулы перехода к новому основанию, покажите:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$$

2) Вычислите.

а) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4}$ б) $\log_{\sqrt{3}} 9^{-1}$ в) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$ г) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$

д) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4$ е) $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8$

ж) $\dfrac{1}{\log_{12} 6} + \dfrac{1}{\log_3 6}$ з) $\dfrac{1}{\log_{36} 3} - \dfrac{2}{\log_{54} 3}$

Показательные уравнения

Показательные уравнения

Свойство показательной функции. При условии, что $a \neq 1$, $a > 0$ равенство $a^x = a^y$ справедливо тогда и только тогда, если $x = y$.
По данному свойству получаем:
1) показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.
2) Если в уравнении $a^x = c$ при $c > 0$ запишем $a^x = a^{\log_a c}$, то $x = \log_a c$.
Заданные показательные уравнения, при помощи определённых методов, приводятся к простейшим показательным уравнениям.

1. Применение свойств степени.

Пример 1. $4^{2x} = 8^{2x-1}$ *заданное уравнение*

$(2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1}$ *приведем к одинаковому основанию*

$2^{4x} = 2^{6x-3}$ *применим свойство возведение степени в степень*

$4x = 6x - 3$ *приведём к равносильным уравнениям*

$2x = 3$; $x = 1{,}5$ *решим уравнения*

Проверка: $4^{2\cdot 1{,}5} = 8^{2\cdot 1{,}5-1}$ $4^3 = 8^2$; $64 = 64$

Пример 2. $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$ *заданное уравнение*

$2\cdot 3^x\cdot 3 - 3^x = 45$ *применим свойство степени*

$3^x(6-1) = 45$ *вынесем общий множитель за скобку*

$3^x = 9$ *упростим*

$x = 2$ *решим уравнение*

2. Уравнения с разными основаниями можно решить разделив обе стороны на одну из степеней или логарифмированием обеих частей.

Пример 3.

$3^{2x} = 5^x$

заданное уравнение запишем следующим образом $(3^2)^x = 5^x$,

$9^x = 5^x$

и разделим обе части на 5^x. Получим:

$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 1$

Отсюда $x = 0$

Пример 4.

$2^{x-1} = 3^x$ *заданное уравнение*

$\lg 2^{x-1} = \lg 3^x$ *прологарифмируем обе стороны*

$(x-1)\cdot \lg 2 = x\lg 3$ *по свойству степени логарифма*

$x\cdot \lg 2 - \lg 2 = x\lg 3$ *распределительный закон умножения*

$x\cdot \lg 2 - x\cdot \lg 3 = \lg 2$ *сгруппируем подобные члены*

$x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 2$ *вынесем общий множитель за скобки*

$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$ *решение уравнения*

$x \approx -1{,}7095$ *приближённый корень уравнения*

3. Введение новой переменной

Пример 5. $9^x - 2\cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ *заданное уравнение*

$3^{2x} - 2\cdot 3^x\cdot 3 - 27 = 0$

$(3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0$ *применим свойство степени*

$3^x = y$ *введём новую переменную*

$y^2 - 6y - 27 = 0$ *приведём к квадратному уравнению*

$(y-9)(y+3) = 0$ *решим квадратное уравнение*

$y = 9;\ y = -3$

$3^x = 9 \qquad 3^x = -3$ *выполним обратную подстановку*

$x = 2 \qquad \varnothing$

Проверка:

$9^2 - 2\cdot 3^{2+1} - 27 = 0$

$81 - 54 - 27 = 0$

$0 = 0$

Ответ: $x = 2$

Если уравнение состоит из членов, которые имеют одинаковую степень, а основания являются последовательными членами геометрической прогрессии, то обе части уравнения делится на один из крайних членов и вводится новая переменная.

Пример 6. $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x = 0$ *разделим каждую сторону на 4^x*

$3 + 2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$

$3 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$ *выполним замену $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$*

$2y^2 - 5y + 3 = 0$ *приведём к квадратному уравнению*

$y = 1 \qquad y = \frac{3}{2}$ *решим квадратное уравнение*

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ *выполним обратную подстановку*

$x = 0 \qquad x = 1$ *получим решение уравнения*

Обучающие задания

1. Применив свойство степени, решите следующие уравнения.

а) $25^x = 125$ б) $9^{x+1} = 27$ в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$

г) $5^{x^2-2x-1} = 25$ д) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{x-4} = 8^{-2}$ е) $3^{2x}\cdot 2^x = 324$

ж) $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$ з) $4^{x+2} + 4^{x+1} = 320$ и) $3^{x+1} - 4\cdot 3^{x-2} = 69$

2. Решите уравнения.

1) $4^{3x} = 8^{x-3}$ 2) $27^x = 9^{x-2}$ 3) $125^{2x-1} = 25^{x+4}$

4) $16^{2x-3} = 32^{x+3}$ 5) $2^{4x} = 4^{x+3}$ 6) $3^{x+1} = 9^{x-1}$

7) $25^{x-1} = 5^{3x}$ 8) $36^{3x-1} = 6^{2x+5}$ 9) $3^{x-2} = 27$

10) $2^{3x+5} = 128$ 11) $5^{x-3} = \frac{1}{25}$ 12) $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

13) $36^{2x} = 216^{x-1}$ 14) $3^{5x}\cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 15) $49^x = 7^{x^2-15}$

16) $81\cdot 9^{-2x-2}\cdot 9^x = 27$ 17) $9^{-3x}\cdot 9^x = 27$ 18) $16^x\cdot 64^{3-3x} = 64$

Показательные уравнения

3. Введя новую переменную решите следующие уравнения.

а) $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$ б) $9^x - 6\cdot 3^x - 27 = 0$ д) $4^x - 14\cdot 2^x - 32 = 0$

в) $4^x - 14\cdot 2^x - 32 = 0$ г) $4^x - 4^{2-x} = 15$ е) $4^x - 7\cdot 2^x + 12 = 0$

4. Решите уравнение.

а) $7^{x-3} = 4^{3-x}$ б) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3\cdot 5^x$ в) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 4^{x-0,5}$

5. Разделив каждую сторону на одну из степеней, решите следующие уравнения.

а) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$ б) $4\cdot 9^x + 12^x - 3\cdot 16^x = 0$ в) $2\cdot 27^x = 3\cdot 12^x + 18^x$

6. Решите уравнения.

а) $125^x = 5\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot \ldots \cdot 5^{17}$ б) $2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot \ldots \cdot 2^{2x} = 0,25^{-10}$

7. Решите уравнения.

а) $2^{x+3} = 4^{3x-5}$ б) $9^{4x-1} = 27^{3x+5}$ в) $4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$

г) $2^x = 7$ д) $10^{x-4} + 4 = 11$ е) $10^x + 10^{x+1} = 11$

8. Решите уравнения.

1) $10^{x-3} = 100^{4x-5}$ 2) $25^{x-1} = 125^{4x}$ 3) $3^{x-7} = 27^{2x}$

4) $36^{x-9} = 6^{2x}$ 5) $8^{5x} = 16^{3x+4}$ 6) $e^{-x} = 6$

7) $2^x = 15$ 8) $1,2e^{-5x} + 2,6 = 3$ 9) $4^x - 5 = 3$

10) $5e^{-x} + 9 = 6$ 11) $10^{2x} + 3 = 8$ 12) $0,25^x - 0,5 = 2$

13) $\frac{1}{4}\cdot 4^{2x} + 1 = 5$ 14) $\frac{2}{3}\cdot e^{4x} + \frac{1}{3} = 4$ 15) $10^{-12x} + 6 = 100$

9. Зависимость между температурой и временем при охлаждении задаётся формулой Ньютона $T = (T_0 - T_r)e^{-rt} + T_r$, где T - температура в данный момент времени, T_0 - температура в начальный момент времени, T_r - температура окружающей среды (средняя температура), r - скорость охлаждения (скорость изменения за единицу времени), *t - время.*

Температура воздуха в комнате 22° C . Температура чая 80° C .Через 10 минут температура чая стала 60° C.

а) По формуле Ньютона найдите коэффициент r.

б) Через сколько минут температура чая станет 35° C?

10. Решите уравнения :

а) $9^{\sin^2 x} - 27^{\cos x} = 0$ б) $2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} + 1 = 0$

в) $|x-4|^{\frac{x^2 - 11x + 28}{x-3}} = 1$ г) $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$

Логарифмические уравнения

Свойство логарифмической функции

Равенство $\log_a x = \log_a y$ справедливо при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ тогда и только тогда, если $x = y$.

1) Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при условии $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Решив уравнение $f(x) = g(x)$, и найдя его корни необходимо проверить, удовлетворяют ли они условию $f(x) > 0, g(x) > 0$.

2) Если уравнение $\log_a f(x) = c$ заменить эквивалентному уравнению в экспоненциальной форме получим $f(x) = a^c$.

Решение логарифмический уравнений, после определённых преобразований, сводится к решению простейших логарифмических уравнений.

1) Решение логарифмических уравнений при помощи свойства логарифма.

Пример. $\log_3 x = 2 - \log_3 2$ *заданное уравнение*

$\log_3 x + \log_3 2 = 2$ *прибавим к каждой части log₃2*

$\log_3 (2x) = 2$ *применим свойство логарифма*

$2x = 3^2$ *запишем в эквивалентной экспоненциальной форме*

$x = 4{,}5$ *получим решение уравнения*

2) Решение уравнения при помощи введения новой переменной.

Пример. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ *заданное уравнение*

$\log_5 x = a$ *выполним замену*

$a^2 - a - 2 = 0$ *приведём к квадратному уравнению*

$(a - 2)(a + 1) = 0$ *решим квадратное уравнение*

$a = 2$ $\quad a = -1$ *выполним обратную подстановку*

$\log_5 x = 2$	$\log_5 x = -1$
$x = 5^2$	$x = 5^{-1}$
$x = 25$	$x = \frac{1}{5}$

3) Решение уравнений, приведением к одинаковому основанию.

Пример. $\log_4 x + \log_2 x = 6$ *заданное уравнение*

$\log_{2^2} x + \log_2 x = 6$ *приведём логарифмы к одинаковому основанию*

$\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 6$

$\frac{3}{2}\log_2 x = 6$ *приведём подобные члены*

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$ *запишем в экспоненциальной форме*

$x = 16$ *получим решение уравнения*

Логарифмические уравнения

Рассмотрим ещё один пример уравнения, решение которого сводится к применению свойства логарифма.

Пример. $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$ *заданное уравнение*

$\lg(x+4)\cdot(2x+3)=\lg(1-2x)$ *применим свойство логарифма*

$(x+4)\cdot(2x+3)=(1-2x)$ *приведём к алгебраическому уравнению*

$x_1=-1;\ x_2=-5{,}5$

Проверка.

Выражение стоящее под знаком логарифма должно всегда быть положительным, то есть $x+4>0$, $2x+3>0$, $1-2x>0$.

Значение $-5{,}5$ не удовлетворяет этому условию, значит оно является посторонним корнем. Значение -1 данному условию удовлетворяет. Ответ: -1

Обучающие задания

1. Решите уравнения.

а) $\log_2 2^3+\log_2 2^2=\log_2 x$ б) $\log_2 16+\log_2 2=\log_2 x$

в) $\log_3 x-\log_3 9=\log_3 3$ г) $\log_5 x+\log_5 x=\log_5 625$

д) $\log_x 64-\log_x 16=\log_4 16$ е) $\log_2 8+\log_3 9=\log_x 32$

2. Решите уравнения.

а) $\log_2(3-x)=3$ б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-1$ в) $\log_{\sqrt{3}}(3x-5)=2$

г) $\log_2(x^2+4x+3)=3$ д) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1)=-2$

е) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3)=1$ ж) $\log_4(\log_3(\log_2(x-1)))=0$

з) $\log_3(1+\log_3(2^x-7))=1$ и) $\log_7(4x-6)=\log_7(2x-4)$

к) $\ln(x^2-2x-4)=\ln 11$ л) $\log_2(2x^2-2)=\log_2(5x-4)$

3. Применив свойство логарифма, решите следующие уравнения.

а) $\log_3 x+\log_3(x-2)=\log_3 8$ б) $\log_6(2x^2-7x+6)-\log_6(x-2)=\log_6 x$

4. Введя новую переменную решите уравнения.

а) $\log_3^2 x=4+3\log_3 x$ б) $\log_5^2 x-\log_5 x=2$ в) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=3$

5. Приведите обе части к одинаковому основанию и решите уравнения.

а) $x^{\log_2 x-2}=8$ б) $x^{\log_5 x}=125x^2$ в) $x^{\lg x}=100x$

6. Решите уравнение графически.

а) $\log_3(x+2)=2-x$ б) $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$

7. Решите уравнения.

а) $\log_2 x + \log_2 3 = 1$
б) $\log_3 x - \log_3 2 = 2$
в) $\log_3 x + \log_3 2 = 2$
г) $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$
д) $\log_6 x + \log_6(x-1) = 1$
е) $\log_4(x-2) - \log_4(x+1) = 1$
ж) $\log_2 x = \log_x 16$
з) $\log_3 x - \log_x 9 = 1$
и) $\log_2 x + \log_x 8 = 4$

8. Решите уравнения.

1) $\log_5(x-18) - \log_5 x = \log_5 7$
2) $\log_2(x-6) + \log_2(x-8) = 3$
3) $\log_3(2x-1) = 2 - \log_3(x+1)$
4) $7^{2x} = 2^{x+3}$
5) $1{,}6^{x-4} = 5^{3x}$
6) $9^{2x-1} = 71^{x+2}$

9. При каком значении a верно равенство $1 - \log_2 a - \log_2 5 = \log_2 (a+1)$?

10. Определите значения переменных, для которых уравнения имеют смысл и решите их.

а) $\log_2 x^2 = 6$ б) $2\log_2 x = 6$

11. Найдите pH для раствора, содержащего ионы водорода.

$[H+] = 7{,}9\cdot 10^{-3}$ $[H+] = 8{,}1\cdot 10^{-5}$ $[H+] = 2{,}3\cdot 10^{-4}$

12. Найдите концентрацию раствора, содержащего ионы водорода, если pH равен:

pH $= 3{,}1$ pH $= 6{,}8$ pH $= 1{,}8$

13. Найдите значения x и y, *если* $\log_3 81 = x - y$ и $\log_2 32 = x + y$.

14. **Физика.** Альтиметр - это прибор, который измеряя атмосферное давление определяет высоту над уровнем моря. Зависимость между высотой (в метрах) и атмосферным давлением (в паскалях) задаётся формулой $h = -8005\ln\frac{P}{101300}$. Найдите атмосферное давление при подъёме на высоту 3500 м.

15. **Землетрясение.** Амплитуда землетрясения находится по формуле $A = A_0 \times 10^M$, где A_0 - амплитуда самого слабого землетрясения, M - сила землетрясения по шкале Рихтера. Амплитуда землетрясении силой 5,3 баллов в 125 раз больше амплитуды повторных толчков, после землетрясения. Найдите силу повторных толчков.

16. **Химия.** Показатель pH уксусной кислоты равен 2,9. Найдите концентрацию ионов водорода в муравьиной кислоте, если она в 1,8 раза больше концентрации уксусной кислоты.

17. **Финансы.** Если на счёт в банке поместить 1 манат под 6% рост, то размер вклада через t лет можно посчитать по формуле $S = 1{,}06^t$. Выразите переменную t через S. За сколько лет сумма вклада в размере 1000 манат достигнет1500 манат?

Радиоактивный распад изотопа Углерод 14 учёные широко используют для определения возраста останков животных и растений. Изотоп Углерод 12 встречается на Земле чаще, но он не радиоактивен и не распадается, в отличии о изотопа Углерод 14. Изотоп Углерод 14 получается в атмосфере из солнечных лучей и проникает в растения посредством фотосинтеза, а оттуда в организм животных, которые питаются этими растениями и т.д. В растениях и животных содержится 10^{-10} процентов атомов углерода изотопа Углерод 14. Когда растение или животное погибают они прекращают получать Углерод 14, а тот углерод который остался в организме начинает распадаться. Период полураспада этого изотопа 5730 лет. Подсчитав сколько процентов атомов углерода изотопа Углерода14 осталось в растении или животном можно определить время их гибели.

18. **Решите задачу по формуле** $m = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$**. (здесь** m_0 **- первоначальная масса вещества,** T **- период полураспада,** t **- время)**

а) Из останков костей слона улетучилось 36% Углерода 14. Сколько лет назад жил слон?

б) Период полураспада вещества 3 года. Если масса вещества изначально составляла 67 г, то через сколько лет она будет равна 7 г?

в) две трети части определённого количество урана распадается за 0,26 миллиардов лет. Найдите период полураспада урана.

19. За сколько лет сумма в 2000 манат на счету вырастет до 10000, если она размещена под сложный процент со ставкой 8%?

20. Население города ежегодно уменьшается на 3%. Через t лет оно будет $N = N_0\ 0{,}97^t$. Выразите величину t через N.

21. С 1990 до 2000 года численность населения некоторой страны увеличилась с 151 млн. до 173 млн. человек.
а) Определите скорость прироста населения, зная, что она изменяется по закону $N = N_0(1 + r)^t$.
б) Если население будет расти с такой же скоростью, то через сколько лет численность населения составит 220 млн.человек?

22. Уровень pH для напитков типа Кола составляет 2,6, а для молока составляет 6,6. Во сколько раз кислотность Колы больше кислотности молока?

Показательные и логарифмические неравенства

Решение показательных неравенств обычно приводит к решению неравенств вида $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$. Здесь $a > 0$, $a \neq 1$.

Решаются данные неравенства при помощи свойства возрастания или убывания показательной функции $y = a^x$:

При $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

При $0 < a < 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, а неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Пример.

$2^{x+1} > 8$ *заданное неравенство*

$2^{x+1} > 2^3$ *применим свойство степени*

$x + 1 > 3$ *заменим на равносильное неравенство*

$x > 2$ *получим решение*

Пример.

$0{,}2^{x-1} > 0{,}04$ *заданное неравенство*

$0{,}2^{x-1} > 0{,}2^2$ *применим свойство степени*

$x - 1 < 2$ *заменим на равносильное неравенство*

$x < 3$ *получим решение*

С помощью тождества $c = a^{\log_a c}$, решение неравенств $a^x > c$ (или $a^x < c$) сводится к решению равносильных неравенств $a^x > a^{\log_a c}$ (или $a^x < a^{\log_a c}$).

Решение показательных неравенств при помощи определённых методов сводится к решению простейших показательных неравенств.

1) Применение свойства степени.

Пример. а) $8 \cdot 4^{x-1} > 2^x$

$2^3 \cdot (2^2)^{x-1} > 2^x$

$2^{2x+1} > 2^x$

$2x + 1 > 4x$

$x > -1$

б) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 30$ *заданное неравенство*

$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} < 30$ *применим свойство степени*

$3^x(3 + \frac{1}{3}) < 30$ *сгруппируем*

$3^x < 30 \cdot \frac{3}{10}$ *упростим*

$3^x < 9$

$3^x < 3^2 \quad x < 2$

Если показатели степени равны, то удобнее всего разделить обе части неравенства на одну из степеней.

Пример. $2^x > 3^{2x}$ *заданное неравенство*

$2^x > 9^x \quad : 2^x$ *разделим каждую из двух частей на* 2^x

$1 > (\frac{9}{2})^x$

$(\frac{9}{2})^x < (\frac{9}{2})^0$ *так как* $a^0 = 1$

$x < 0$

2) Введение новой переменной.

Пример. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$ *заданное неравенство*

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \quad 2^x = a$ *выполним замену*

$a^2 - 6a + 8 < 0$ *решим квадратное неравенство*

$(a - 2)(a - 4) < 0$

$2 < a < 4$ *выполним обратную замену*

$2 < 2^x < 2^2$

$1 < x < 2$

Показательные и логарифмические неравенства

Обучающие задания

1. Решите показательные неравенства.

а) $3^x \geq \frac{1}{9}$ б) $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$ в) $1{,}5^x \leq 2{,}25$ г) $0{,}3^x \leq 0{,}09$

д) $2^x > 1$ е) $3^x < 1$ з) $4^{-x} < -1$ и) $5^x > -5$

к) $0{,}4^{x+1} > 0{,}16$ л) $3^{2-x} < 27$ м) $3^{x^2} < 9^8$ н) $4^{0{,}5x^2-3} > 8$

о) $4^x > 2^{x^2}$ п) $9^x < 36^x$ р) $5^x > 2^{3x}$ с) $2^{|x-1|} < 8$

2. Применив свойство степени решите показательные неравенства.

а) $3^{x+3} < 27$ б) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} < 448$ в) $4^x + 4^{x-1} < 20$

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$ д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \leq 26$

3. Введя новую переменную решите следующие неравенства.

а) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$ б) $4^x + 2^x > 20$ в) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

г) $3^{x-1} + 3^{2-x} < 4$ д) $5^x + 5^{1-x} > 6$

4. Найдите область определения функции.

а) $y = \sqrt{7\frac{1}{9} - \left(\frac{3}{8}\right)^{2x}}$ б) $y = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{9}{25}\right)^x}$

5. Решите следующие неравенства.

а) $x^2 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 0$ б) $x^2 \cdot 3^x + 9 > x^2 + 9 \cdot 3^x$

в) $0{,}4^{\frac{x^2-4}{x+1}} \leq 1$ г) $2{,}6^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} > 1$

6. Решите показательные неравенства.

$625 \geq 5^{a+8}$ $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

$10^{5b+2} > 1000$ $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$ $\left(\frac{1}{36}\right)^{v+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4v}$

7. Решите неравенства при помощи основного логарифмического тождества.

1) $8^x > 21$ 2) $6^y < 39$ 3) $e^x < 8{,}1254$ 4) $e^x > 0{,}3151$

5) $10^x > 0{,}0138$ 6) $10^y < 16{,}8125$ 7) $e^{0{,}01x} > 15$ 8) $e^{0{,}03y} \leq 4$

8. Решите показательные неравенства.

1) $2^{x^2-3x-6} - 16 \geq 0$ 2) $\frac{e^x}{e^x - 4} \leq 3$ 3) $xe^{2x} < 4x$

Показательные и логарифмические неравенства

Практическая работа. 1) Какие знаки сравнения надо вставить в цветные ячейки?

а) $\log_2 3 \,\square\, \log_2 7$ б) $\log_{0,5} 5 \,\square\, \log_{0,5} 7$

2) Какие числа надо вставить в цветные ячейки, чтобы неравенство было истинно?

а) $\log_2 \square < \log_2 5$ б) $\log_{0,5} \square < \log_{0,5} 4$

в) $\log_2 \square > \log_2 5$ г) $\log_{0,5} \square > \log_{0,5} 4$

3) Существует ли значение x, большее 5, удовлетворяющее неравенству $\log_2 x \le \log_2 5$? Выразите своё мнение о значениях x, удовлетворяющих неравенству.

4) Проведите обсуждение по поводу значений x удовлетворяющих неравенству $\log_{0,5} x \le \log_{0,5} 4$.

Логарифмические неравенства

Логарифмические неравенства решаются при помощи свойств возрастания или убывания логарифмической функции на множестве допустимых значений.

Пример. $\log_2(x + 1) > \log_2 7$

Так как функция $\log_2 x$ возрастающая, то на области определения данной функции $x + 1 > 0$ получим $x + 1 > 7$. Значит, надо найти значения x удовлетворяющие неравенствам $x + 1 > 0$ и $x + 1 > 7$. Отсюда $x > 6$.

Ответ: $(6; +\infty)$

Пример. $\log_{0,2}(x - 1) > \log_{0,2} 3$

Так как функция $\log_{0,2} x$ убывающая, то на области определения данной функции $x - 1 > 0$, получим $x - 1 < 3$. Значит, надо решить двойное неравенство $0 < x - 1 < 3$. Отсюда $1 < x < 4$.

Ответ: $(1; 4)$

при $a > 1$

логарифмическое неравенство	*равносильное неравенство*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

при $0 < a < 1$

логарифмическое неравенство	*равносильное неравенство*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

Пример. Неравенство $\log_5 (3x - 4) < \log_5 (2x - 2)$ равносильно двойному неравенству $0 < 3x - 4 < 2x - 2$ или системе неравенств $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 3x - 4 < 2x - 2 \end{cases}$

Отсюда получаем, что $x > \frac{4}{3}$ и $x < 2$. Множество решений неравенства: $\frac{4}{3} < x < 2$

Показательные и логарифмические неравенства

Пример. решим неравенство $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$
Выражение, стоящее под знаком логарифма по определению логарифма, положительно: $x > 0$. Выполним замену $\log_2 x = t$, получим неравенство $t^2 - t - 2 < 0$. Промежуток $-1 < t < 2$ является решением неравенства. Выполним обратную замену, получим $-1 < \log_2 x < 2$. Отсюда $\frac{1}{2} < x < 4$. Ответ: $(\frac{1}{2}; 4)$

Обучающие задания

1. Решите логарифмические неравенство

а) $\log_2(x+1) < \log_2 3$ б) $\log_3(x-1) > \log_3 5$ в) $\log_{0,1}(x-2) > \log_{0,1} 4$
г) $\log_4(x-3) > 2$ д) $\log_5(3x-1) < 2$ е) $\log_{0,2}(5-2x) > -1$
ж) $\log_7(2x-1) > \log_7(x+2)$ з) $\log_5(3x-4) \le \log_5(x+2)$
и) $\log_{0,5}(4x-11) < \log_{0,5}(x-11)$ к) $\log_{0,2}(2x-8) > \log_{0,2}(x-1)$

2. Решите неравенства.

1) $\log_5(x-9) > 3$ 2) $\log_7(4x-3) > 0$ 3) $\log_7(2x-1) < 2$
4) $\log_2(x+20) \ge 5$ 5) $\log_4(x+\frac{1}{2}) \ge -1$ 6) $\lg(5x+150) \le 1$
7) $\log_7(2x-5) \ge 2$ 8) $\log_8(x+5) \le 1$ 9) $\log_2(x-\frac{2}{3}) \le -2$

3. Решите неравенства.

1) $\log_5(3-2x) \ge \log_5(4x+1)$
2) $\log_{0,3}(10x+3) < \log_{0,3}(7x-21)$
3) $\lg x + \lg(x+1) > \lg 2x$
4) $\lg x + \lg(2-x) < 1$
5) $\lg x - \lg(2-x) > 0$
6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 0$
7) $\lg(x^2 - x + 8) \le 1$
8) $\log_3(x^2 - 2x) < 1$
9) $\log_2(x^2 - x - 6) + \log_{0,5}(x-3) < 2\log_2 3$
10) $\log_{\sqrt{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 64$
11) $\log_2(x^2 - 3x - 10) - \log_2(x+2) \le 2$
12) $|3 - \log_2 x| < 2$

4. Количество членов общественной организации каждый год уменьшается на 7%. Формула $P = N(1 - 0,07)^t$, показывает какое количество членов будет через t лет, если изначально их количество было равно N. В 2010 году в организации состояло 5000 человек. Через сколько лет количество членов станет меньше 2500 человек?

5. Остаток при распаде Углерода-14 через t лет можно вычислить (в граммах) по формуле $C = 20\, e^{-0,0001216t}$.
а) Найдите изначальное количество Углерода-14.
б) Сколько грамм составит количество оставшегося Углерода-14, через 10 000 лет?
в) Приблизительно через сколько лет остаток Углерода-14 для данного объекта станет меньше 10 грамм?

Показательные и логарифмические неравенства

6. Решите логарифмические уравнения и неравенства.

а) $\log_2(3x+2) = \log_2(12x+3)$ б) $\log_6(7x+1) = \log_6(4x-4)$
в) $\log_3 3x = \log_3(2x+2)$ г) $\log_5(1-x) = \log_5(2x+5)$
д) $\log_4(9x+1) > \log_4(18x-1)$ е) $\log_3(3x-5) \geq \log_3(x+7)$
ж) $\log_5(2x+1) < \log_5(3x-2)$ з) $\log_2 2x = \log_4(x+3)$

7. Решите неравенства

а) $\log_\pi(x) + \log_\pi(x+1) < \log_\pi 2$ б) $\log_{0,6}(4-x) \geq \log_{0,6}2 - \log_{0,6}(x-1)$
в) $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$ г) $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x < 4$
д) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$ е) $\log^2_{0,1} x - 1 \geq 0$
ж) $\log_3(\log_{0,5}(2x-1)) > 0$ з) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}}(x-9)) > -1$
и) $|1 - 2\log_3 x| < 3$ к) $|1 - \log_3 x^2| < 3$

8. За сколько лет, сумма, вложенная в банк под сложные проценты с процентной ставкой 8%, выросла с 1000 манат до как минимум 1500 манат.
$S = S_0 e^{rt}$

Решение Деньги на счету	Минимум	1500м
S	$\geq$	1500

$1000e^{0,08t} \geq 1500$ *по условию*

$e^{0,08t} \geq 1,5$ *разделим обе стороны неравенства на 1000*

$\ln e^{0,08t} \geq \ln 1,5$ *прологарифмируем обе части неравенства ln*

$0,08t \geq \ln 1,5$ *применим свойство неравенств для логарифмической функции*

$t \geq \dfrac{\ln 1,5}{0,08}$ *обе части неравенства разделим на 0,08*

$t \geq \dfrac{0.4054}{0,08}$ $t \geq 5,068$ $t \geq 5,1$

Ответ: приблизительно через 5,1 лет сумма на счету достигнет 1500 манат.

9. Зависимость численности населения от времени вычисляется по формуле $P = P_0 e^{kt}$, где P_0 - численность населения, k скорость прироста населения, t - количество лет, P показывает численность населения через t лет. В 2000 году численность населения в городе А составляла 8,5 тыс. человек, в 2010 населения уже 9,4 тыс. человек.
а) Найдите скорость прироста населения (коэффициент).
б) Через сколько лет численность населения достигнет10 тыс. человек?
в) Если, численность населения города В 2000 году можно смоделировать по формуле $y = 9,5e^{0,00278t}$, то через сколько лет население города А станет больше населения города В?

10. Численность населения Земли в 1980 году составляла приблизительно 4,8 млрд., в 1994 году она достигла 5,5 млрд. До какого года численность населения не превышала 6 млрд.(при условии, что скорость прироста оставалась прежней)?

Обобщающие задания

1. Найдите n по заданной формуле.

а) $M = 3e^{-2n} + 5$ б) $a^{2n} = b^2$ в) $y = ae^{4n}$

2. Дядя Мехман считает, что 90 000 манат, вырученные от продажи дома надо поместить на год в банк. Банк предлагает два вида депозита: под сложный процент со ставкой 9% за полгода и ежедневное начисление процента. Будет ли разница между этими двумя предложениями банка?

3. Представьте, что вы приняли 500 мг аспирина. Количество оставшегося аспирина в крови за t часов можно смоделировать функцией $y = 500\,(0{,}8)^t$. Через сколько часов количество аспирина в крови останется меньше 50 миллиграмм?

4. Найдите уровень pH, зная концентрацию ионов водорода .

а) лимонная вода: $[H+] = 7{,}9 \times 10^{-3}$ моль/л
б) аммониак: $[H+] = 10^{-11}$ моль/л
в) уксус: $[H+] = 6{,}5 \times 10^{-3}$ моль/л
г) апельсиновая вода: $[H+] = 3{,}2 \times 10^{-4}$ моль/л

5. Решите уравнения и неравенства.

1) $6^x \geq 42$ 2) $5^x = 52$ 3) $8^{2a} < 124$ 4) $4^{3p} = 10$
5) $20^{x^2} = 70$ 6) $2^{x^2-3} = 15$ 7) $8^{2n} > 52^{4n+3}$ 8) $2^{2x+3} = 3^{3x}$
9) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) = 2$ 10) $(x-2)\cdot\log_5(x+1) = 0$ 11) $(x^2-4)\cdot\log_3 x = 0$
12) $\log_x 3 > 0$ 13) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4) < 4$ 14) $(x+1)\cdot\log_2(x+1) > 0$

6. Джамиль составил таблицу изменения численности населения с 11450 до 95600 человек со скоростью прироста 4,32%. Однако, он не помнил за какое время это произошло. Найдите количество лет соответствующее данным.

7. Упростите.

а) $\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ б) $\log_3\frac{2x^3}{27}$ в) $5\ln x + \ln y + \frac{1}{3}\ln z$

8. Найдите значение выражения $\log_b x\sqrt[3]{x}$, если $\log_b x = 0{,}2$.

9. При помощи каких преобразований из графика функции $y = \log_2 8x^3$ можно получить график функции $y = \log_2 x$?

10. Если $\log_t M = 1{,}28$ и $\log_t N^2 = 1{,}74$, найдите:

а) $\log_t N$ б) $\log_t (MN)$ в) $\log_t\frac{N^2}{\sqrt{M}}$

11. Запишите формулу экспоненциальной функции $y = ab^x$, график которой проходит через точки (1;1) и $(3; \frac{1}{9})$.

Обобщающие задания

12. **Здоровье и физика. Специалисты рекомендуют, при работе со звуком больше 85 Db, пользоваться защитными приборами.**

а) Уровень звука, который исходит от станка для колки дров равен 80 dB, а музыкального усилителя (плеера) 110 dB. Во сколько раз интенсивность звука от музыкального усилителя больше, чем от станка для колки дров?

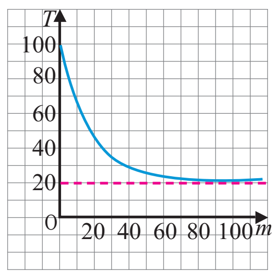
б) Звук, громкость которого в 100 000 раз больше гомкости шёпота безопасен для человека. Если интенствность звука при шёпоте равна 20 dB, то найдите интенсивность звука безопасного для человека.

13. По мнению социологов новость распространяется с экспоненциальной скоростью. Новость, об открытии нового торгового центра через время t среди 2000 человек, выражается функцией $y = 2000\,(1 - e^{-0{,}03t})$.

а) Сколько человек узнает об открытии торгового центра через 24 часа?

б) Постройте функцию при помощи граф калькулятора и приблизительно определите, через сколько времени 90% людей узнают эту новость.

14. Температура воды в чашке изменилась со 100°С-до 20°С(комнатная температура). Каждую минуту температура воды в чашке изменилась и на графике зависимости температуры от времени отмечалась точка. Через данные точки провели кривую и получили график, показанный на рисунке. После чего стало известно, что каждые 5 минут температура изменялась на 25% в экспоненциальной зависимости. Формулу зависимости можно написать в виде $f(x) = a \cdot b^{x-h} + k$. По графику найдите соответствующие значения переменных a, b, h, k и запишите функцию



15. Сеймур купил новый автомобиль за 15000 манат. Каждый год стоимость автомобиля уменьшается на 15%.Через сколько лет цена автомобиля станет меньше 3000 манат?

16. Используя свойства логарифма упростите и найдите значение выражения

а) $9\log_9 3 - \log_9 75 + 2\log_9 5$ б) $\log_2 98 - 2\log_2 7 - 2$

в) $2\log_3 6 - 3\log_3 2 + \log_3 18$ г) $\frac{1}{2}\log_2 36 + \log_2 12 - 2\log_2 3$

17. Постройте графики функций $y = \lg x^2$ и $y = 2\lg x$. Запишите схожие и отличительные свойства данных функций. При каких значениях переменных верно равенство $\lg x^2 = 2\lg x$?

10 Комплексные числа

Это интересно!

Французский учёный Абрахам де Муавр (1667-1754) известен своими работами в области теории вероятности и формулой Муавра. Его работа “The Doctrine of Chances A method of calculating the probabilities of events in play” (Доктрина шансов: метод вычисления событий в играх) получила большой резонанс и неоднократно переиздавалась.

Хроника возникновения комплексных чисел

Приблизительная дата	Личность	Событие
50	Герон, Александрия	Впервые встречается информация об отрицательном квадратном корне
850	Махавира, Индия	Не существует квадратный корень от отрицательного числа,так как квадрат не может быть отрицательным числом.
1545	Кардано, Италия	Корни кубического уравнения содержат квадратный корень отрицательного числа.
1637	Декарт, Франция	Разделение действительной и мнимой частей
1748	Эйлер, Швеция	Выражение $\sqrt{-1}$ через i
1832	Гаусс, Германия	Использование понятия комплексного числа

Комплексные числа

Исследование

1) Подтвердите примерами справедливость следующих высказываний. Если высказывание ложно, то сделайте так, чтобы оно стало истинным.

а) если a и b - натуральные числа, то корень уравнения $x + a = b$ также является натуральным числом.

б) если a и b -целые числа, то корень уравнения $ax = b$ также является целым числом

в) если a неотрицательное рациональное число, то корень уравнения $x^2 = a$ также является рациональным числом.

г) если a неотрицательное действительное число, то корень уравнения $x^2 = a$ также является действительным числом.

2) Существует ли действительное число квадрат которого равен –1?

3) а) Существуют ли действительные корни уравнения $x^2 = a$ при $a < 0$.

б) Можно ли решить эту задачу расширив множество действительных чисел?

4) Существует ли однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек на числовой оси? А какие числа соответствуют точкам на координатной плоскости?

На множестве действительных чисел уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений. Значит, мы должны расширить множество действительных чисел так, чтобы корни этого уравнения входили в него. Для этого введём новое число i и примем, что оно является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$, т.е. $i^2 + 1 = 0$. Отсюда $i^2 = -1$. После этого, корнями уравнения $x^2 + 1 = 0$ являются числа $x_{1,2} = \pm i$. Число i называется мнимой единицей.

Расширим множество действительных чисел так, чтобы в него входили все действительные числа и число i, и были справедливы все свойства сложения и умножения. Для произвольных действительных чисел a и b введём “произведение” bi и “сумму” $a + bi$, и назовём комплексным числом следующее выражение $a + bi$. Выражение вида $a + bi$ называется комплексным числом, где a и b - действительные числа, i мнимая единица.Комплексные числа можно обозначать через z, w, ω и т.д.Например, $z = a + bi$. Запись $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа. a является действительной частью, b - мнимой частью комплексного числа $z = a + bi$, и записывается так: $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{\dot{I}m}\, z$. При $a = 0$ получается число вида bi. Эти числа называются чисто мнимыми числами. При $a = 0$, $b = 0$ комплексное число равно нулю и наоборот, если $a + bi = 0$, то $a = 0$ и $b = 0$. **Следствие:** для комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ равенство $a + bi = c + di$ справедливо тогда и только тогда, если $a = c$, $b = d$.

Пример. Из равенства $x + 3i = 5 + (x + y)i$ найдите x и y.

Решение: Из равенства действительных и мнимых частей получаем:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases}, \text{ т.е. } x = 5,\ y = -2.$$

Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(a + c) + (b + d)i$, т.е. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Действия над комплексными числами

Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число $ac - bd + (ad + bc)i$, т.е.

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Значит, два комплексных числа умножаются по правилу умножения многочленов при условии, что $i^2 = -1$.

Пример. $(3 + 2i)\cdot(2 - i) = 3\cdot2 - 3i + 4i - 2i^2 = 6 + i - 2\cdot(-1) = 8 + i$

Рассмотрим частные случаи степеней мнимых единиц:

$i^3 = i^2\cdot i = -i$ $\qquad i^4 = i^2\cdot i^2 = 1$ $\qquad i^5 = i^4\cdot i = i$

$i^6 = i^4\cdot i^2 = -1$ $\qquad i^7 = i^4\cdot i^3 = -i$ $\qquad i^8 = i^4\cdot i^4 = 1$

Как видно, натуральные степени мнимой единицы i равны $i, -1, -i$, 1 и повторяются через каждые четыре шага, т.е.справедливо равенство $i^{4m+k} = (i^4)^m\cdot i^k = i^k$.

Пример. Вычислите: а) i^{58} б) i^{63}

Решение: а) $i^{58} = i^{4\cdot14+2} = i^2 = -1$ б) $i^{63} = i^{4\cdot15+3} = i^3 = -i$

Число $a - bi$ называется сопряжённым для числа $a + bi$ и обозначается как $\overline{z} = a - bi$. Ясно, что если число $a - bi$ является сопряжённым для числа $a + bi$, то число $a + bi$ является сопряжённым для числа $a - bi$. Поэтому, числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются взаимно сопряжёнными комплексными числами.Действительные части взаимно сопряжённых чисел равны, а мнимые части являются противоположными числами.

Произведение взаимно сопряжённых комплексных чисел является действительным числом: $z\cdot\overline{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

В частном случае, сопряжённым для действительного числа является само число, для мнимого - произведение числа и (-1).

Для каждого комплексного числа $z = a + bi$ существует противоположное число $-z$ и $-z = -a - bi$. Для каждого, отличного от нуля, комплексного числа $z = a + bi$ существует противоположное.

$$\frac{1}{z} = \underbrace{\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)}}_{\text{умножим числитель и знаменатель на } (a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i$$

Вычитание и частное комплексных чисел определяется равенствами:

$$z - w = z + (-w) \qquad \frac{z}{w} = z\cdot\frac{1}{w}\ (w \neq 0)$$

Для нахождения отношения комплексных чисел, удобнее числитель и знаменатель умножить на число, сопряжённое для знаменателя .

Пример. Найдём разность и отношение чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 2 - i$.

Решение: $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i)\cdot(2 + i)}{(2 - i)\cdot(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{6 + 7i - 2}{5} = \frac{4 + 7i}{5} =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\,i = 0{,}8 + 1{,}4i$$

Действия над комплексными числами

Все свойства арифметических операций для действительных чисел, справедливы для комплексных чисел. Как следствие, получаем, что любые алгебраические тождества справедливы для множества комплексных чисел.

Например, для комплексных чисел z и w справедливы тождества
$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$; $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$ и т.д.

Обучающие задания

1. Найдите

а) i^{12} б) i^{15} в) i^{21} г) i^{82} д) i^{101}

2. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел.

а) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + i$ б) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 3 + i$

3. При каких действительных значениях x и y справедливо равенство?

а) $(x + y) + 2i = 3 - (x - y)i$ б) $4 + xyi = x + y + 3i$

4. При каких действительных значениях x и y следующие числа являются взаимно сопряжёнными?

а) $z_1 = 5 + xi$, $z_2 = y + 4i$ б) $z_1 = (x + y) + i$, $z_2 = 5 - (x - y)i$

5. Выполните действия.

а) $(3 + 4i) + (4 - 3i)$ б) $(5 + 4i) - (3 + 2i)$
в) $(2 + 3i)\cdot(3 + 2i)$ г) $(4 - i)\cdot(4 + i)$
д) $(i + 1)^2$ е) $(2 + i)^2$
ж) $(1 + i)^2\cdot(3 - i)$ з) $(2 + i)^2\cdot(2 - i)^2$
и) $(i + 1)^8$ к) $(i^8 + i^5)\cdot(i + 1)$

6. Разложите на множители

а) $m^2 + 4$ б) $y^2 + 9$ в) $4x^2 + 1$

Пример. а) $m^2 + 4 = m^2 - 4\cdot i^2 = m^2 - (2i)^2 = (m - 2i)\cdot(m + 2i)$

7. Упростите.

а) $\dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{2-i}{2+i}$ б) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

8. Решите уравнение.

а) $x^2 + 4 = 0$ б) $x^2 + 3 = 0$ в) $x^2 + 16 = 0$

9. Для следующих чисел найдите сопряжённые числа.

а) $z = 3 + 4i$ б) $z = \dfrac{2}{1-i}$ в) $z = (2 + i)^2$

Квадратный корень комплексного числа

Число, квадрат которого равен z называется квадратным корнем комплексного числа z и обозначается как $\sqrt{z}$.

Пример. Найдём квадратный корень комплексного числа $3 - 4i$

Решение: Пусть $\sqrt{3 - 4i} = x + yi$.

Возведём обе части равенства в квадрат:

$$3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Из равенства действительных и мнимых частей имеем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Отсюда получаем решение $(2; -1)$ и $(-2; 1)$. Значит, $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$

Примечание: В отличии от действительных чисел, говоря о квадратном корне комплексного числа, имеется в виду каждое из двух значений, различающихся знаками. Корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ для множества комплексных чисел находится по тому же правилу, что и для действительных чисел.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример. Решим уравнение $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Решение:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x_1 = -2 + i$ $\quad$ $x_2 = -2 - i$

Легко можно проверить, что также в силе остаётся и теорема Виета. Для квадратного уравнения с действительными коэффициентами комплексные корни являются сопряжёнными числами.

Обучающие задания

1. Найдите.

а) $\sqrt{-25}$ $\quad$ б) $\sqrt{3 + 4i}$ $\quad$ в) $\sqrt{8 + 6i}$ $\quad$ г) $\sqrt{4 - 3i}$

2. Решите уравнения.

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$ $\quad$ б) $x^2 - 6x + 13 = 0$

в) $x^2 + 8x + 41 = 0$ $\quad$ г) $x^2 - 2x + 3 = 0$

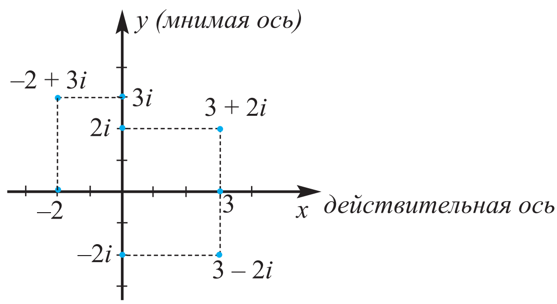
3. Найдите комплексное число, равное квадрату сопряжённого числа $(z \notin R)$.

4. Квадрат какого числа равен i?

Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = a + bi$ задаётся парой действительных чисел $(a; b)$ и эта пара соответствует определённым точкам на координатной плоскости. Поставим в соответствие числу $z = a + bi$ точку $A(a; b)$ и обозначим её через $A(z)$. Каждая точка на координатной плоскости изображает комплексное число и наоборот, каждое комплексное число на координатной плоскости, соответствует одной точке. Действительные числа располагаются на оси абсцисс, чисто мнимые числа на оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется действительной осью, ось ординат - мнимой, а плоскость - комплексной плоскостью.

Пример.



Точки, соответствующие комплексно сопряжённым числам располагаются симметрично оси абсцисс.

Обучающие задания

1. На комплексной плоскости постройте числа.
a) $3 + 2i$ b) $-2 + i$ c) $3i$ d) -3 e) $2 - i$

2. С геометрической точки зрения комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать вектор $\overrightarrow{OM} = \langle a; b\rangle$, начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой $M(a; b)$.

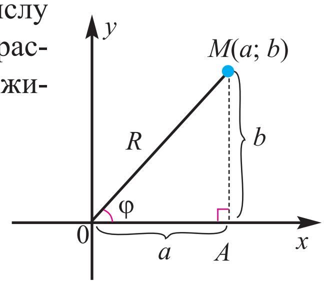
На комплексной плоскости отметьте точки A и B соответствующие комплексным числам $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 + i$. Найдите сумму $z_1 + z_2$ и вектор $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Сравните полученные результаты.

3. На комплексной плоскости изобразите множество точек удовлетворяющих условию. а) $\dot{I}m\, z = 2$ б) $Re\, z = 3$ в) $\dot{I}m\, z \geq 0$

4. На комплексной плоскости отметьте точки A, B и D , соответствующие числам $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$ и $z_4 = 1 + 3i$. Найдите вершину C, параллелограмма ABCD, и соответствующее ей комплексное число z_3.

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть на комплексной плоскости комплексному числу $z = a + bi$ соответствует точка M(a; b). Обозначим расстояние OM через R, угол между лучом OM и положительным направлением оси абсцисс через φ.



Из ΔOMA по теореме Пифагора имеем:

$$R^2 = a^2 + b^2$$

Отсюда: $R = \sqrt{a^2 + b^2}$

Расстояние, от начала координат до точки соответствующей комплексному числу, называется модулем комплексного числа и обозначается как: $|z|$.

$$|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Угол, образованный конечной стороной угла поворота луча OM, называется аргументом φ комплексного числа $z = a + bi$.

Из ΔOMA : $\cos\varphi = \dfrac{a}{R}$ $\quad \sin\varphi = \dfrac{b}{R}$ $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{b}{a}$

Модуль числа $z = a + bi$ имеет единственное значение, а аргумент φ находится с точностью 2π. То есть, если одно из значений аргумента равно φ, то другое будет иметь вид $\varphi + 2\pi k$ ($k \in Z$).

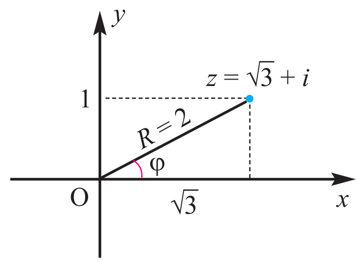
Для аргумента комплексного числа, обычно берётся угол принадлежащий промежутку $[0; 2\pi)$.

Пример 1. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} + i$.

Решение: Из того, что $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ следует,что

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и принимая во внимание, что угол φ расположен в I четверти, получим: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$



Из формул $\cos\varphi = \dfrac{a}{R}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{R}$ получаем:

$$a = R\cos\varphi,\ b = R\sin\varphi$$

Тогда $z = a + bi = R\cos\varphi + i\cdot R\sin\varphi = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Для комплексного числа $z = a + bi$ число $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

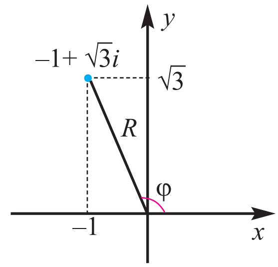
В частном случае для модуля и аргумента числа $z = a + bi$ имеем:

если $b = 0$, $a > 0$, тогда $R = a$, $\varphi = 0$ — если $b = 0$, $a < 0$ тогда $R = |a|$, $\varphi = \pi$

если $a = 0$, $b > 0$ тогда $R = b$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ — если $a = 0$, $b < 0$ тогда $R = |b|$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пример 2. Запишем комплексное число $z = -1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме



Решение: $R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

Так как угол φ принадлежит II четверти, то:

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3})$$

Обучающие задания

1. Следующие числа изобразите на комплексной плоскости и найдите их модуль и аргумент.

а) $6i$ б) $-2i$ в) $-4i + 4$ г) $3 + 6i$

2. Найдите модуль и аргумент следующих чисел:

а) i б) $2i$ в) $-3i$ г) $-2i$
д) 1 е) -2 ж) 5 з) -3
и) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ к) $-\sqrt{3} - i$

3. Запишите следующие комплексные числа в тригонометрической форме.

а) $\sqrt{3} + i$ б) $1 + i$ в) $1 - \sqrt{3}i$ г) $-\sqrt{3} - i$

4. Заданные в тригонометрической форме комплексные числа запишите в алгебраической форме.

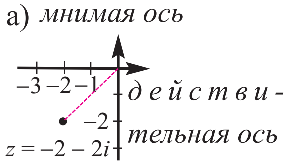
а) $4(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3})$ б) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4})$

5. Запишите следующие числа в тригонометрической форме.

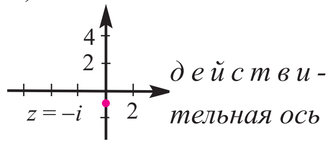
а) $\frac{1 - i}{1 + i}$ б) $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$ в) $4(\sin \frac{\pi}{12} - i\cos \frac{\pi}{12})$

6. Запишите тригонометрическую форму чисел, представленных в геометрической форме.

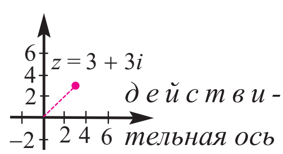
а) *мнимая ось*



б) *мнимая ось*



в) *мнимая ось*



Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Найдём произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме $z_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ və $z_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$z_1 \cdot z_2 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = R_1\cdot R_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 +$$
$$+ i\cdot(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)) = R_1\cdot R_2\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Чтобы найти произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, надо перемножить их модули и сложить их аргументы.

Пример. $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$z_1\cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})) = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 6\cdot(0 + i\cdot 1) = 6i$$

Теперь найдём отношение $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 - (i\cdot\sin\varphi_2)^2} =$$
$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Модуль отношение равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя.

Пример. $z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}(\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) =$$
$$= \sqrt{3} + i$$

Возвести число $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в степень с натуральным показателем n можно умножив n раз число z: $z^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Модуль степени комплексного числа с натуральным показателем равен степени модуля основания, а аргумент равен аргументу основания умноженному на показатель степени *n*.

Пример: $z = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

$$z^4 = 2^4\cdot(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}) = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 16\cdot(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i) = 8 + 8\sqrt{3}i$$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Обучающие задания

1. Представьте числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 1 + i$ *в* тригонометрической форме и найдите: а) $z_1 \cdot z_2$ б) $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Вычислите.

а) $(1 + \sqrt{3}i)^{12}$ b) $(1 - i)^{38}$

3. $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдите $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$

4. $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$. Найдите $(z_1 \cdot z_2)^{12}$.

5. Вычислите .

а) $\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$ б) $\frac{(1+\sqrt{3}\,i)^9}{(1-i)^8}$

6. Формулу $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ называют формулой Муавра. При помощи этой формулы можно найти синус и косинус *n кр*атных углов через синус и косинус одинарных углов.
Например, при $n = 2$ имеем:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Отсюда

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Из равенства двух комплексных чисел имеем:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

Аналогичным образом можно написать формулы для $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$.

7. Запишите комплексное число в алгебраической форме.

а) $2(\cos 120° + i\sin 120°)$ б) $5(\cos 135° + i\sin 135°)$ в) $3(\cos 330° + i\sin 330°)$

8. Выполните действия. Результат оставьте в тригонометрической форме.

а) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$ б) $\frac{\cos 50° + i\sin 50°}{\cos 20° + i\sin 20°}$

в) $\left[\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$ г) $\frac{5(\cos 4{,}3 + i\sin 4{,}3)}{4(\cos 2{,}1 + i\sin 2{,}1)}$

Корень *n*-ой степени комплексного числа

Найдём значение выражения $\sqrt[n]{1}$.

Запишем в виде $1 = \cos 0 + i \sin 0$ и найдём корень *n*-ой степени виде $\sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Возведём каждую из двух сторон в *n*-ую степень:

$\cos 0 + i \sin 0 = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \qquad \cos 0 + i \sin 0 = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Отсюда $\qquad \cos n\theta = \cos 0 \qquad \sin n\theta = \sin 0$

Если два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$.

Это значит, $\qquad n\theta = 0 + 2\pi k \qquad \theta = \dfrac{2\pi k}{n}$

Таким образом, $\sqrt[n]{1} = \cos \dfrac{2\pi k}{n} + i \sin \dfrac{2\pi k}{n}$

Отсюда при $k \geq n$ для первых k значений полученного числа равны значениям, полученным при n.

Обозначим корни *n*- ой степени единицы через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$:

$k = 0 \qquad \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$k = 1 \qquad \varepsilon_1 = \cos \dfrac{2\pi}{n} + i \sin \dfrac{2\pi}{n}$

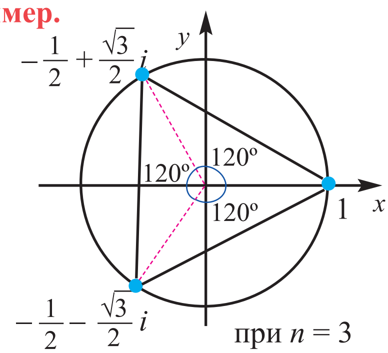
$k = 2 \qquad \varepsilon_2 = \cos \dfrac{4\pi}{n} + i \sin \dfrac{4\pi}{n}$

....

$k = n - 1 \qquad \varepsilon_{n-1} = \cos \dfrac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \dfrac{2\pi(n-1)}{n}$

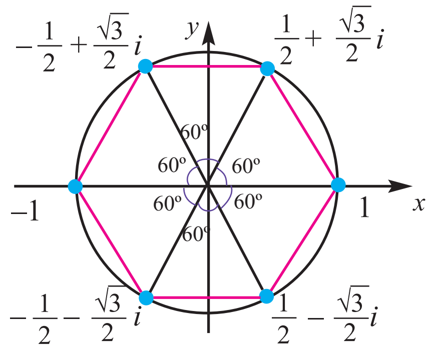
Как видно, модули корней *n*-ой степени равны 1, аргументы отличаются друг от друга в $\dfrac{2\pi}{n}$ раз. То есть, эти числа расположены внутри единичной окружности, центр которой совпадает с началом координат, и соответствуют комплексным числам,являющимися вершинами правильного *n*-угольника.

Пример.



при $n = 3$

значения $\sqrt[3]{1}$



при $n = 6$

значения $\sqrt[6]{1}$

Корень n-ой степени комплексного числа

Корнем n-ой степени комплексного числа z называется такое число w, *что* $w^n = z$.Если $z \neq 0$, то для корня n-ой степени существуют n различных значений.

Запишем $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в виде

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Для $w^n = z$ получим:

$$z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Из равенства двух комплексных чисел получим:

$$r^n = R, \quad r = \sqrt[n]{R}$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \; (k \in Z)$$

Значения при $k > n$ отличаются от первых n *значений* на 2π

Поэтому, должно соблюдаться следующее: $\theta_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$

Формула корня n-ой степени комплексного числа

Если $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \text{ здесь } (k = 0, 1, ..., (n-1))$$

Пример. Найдём все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Решение: пусть $\sqrt[3]{-8} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$. $\qquad -8 = R^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

$$8(\cos\pi + i\sin\pi) = R^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

Отсюда $R^3 = 8$, $R = 2$

$$3\theta = \pi + 2\pi k \qquad \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{3} \; (k = 0, 1, 2)$$

При $k = 0$ $\quad w_0 = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$

При $k = 1$ $\quad w_1 = 2\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + 0\cdot i) = -2$

При $k = 2$ $\quad w_2 = 2\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 - \sqrt{3}i$

Обучающие задания

1. Найдите все значения выражений: а) $\sqrt[4]{1}$ б) $\sqrt[4]{16}$ в) $\sqrt[4]{81}$

2. Напишете все значения выражений для единичного корня n-ой степени.

а) $\sqrt[3]{64}$ б) $\sqrt[6]{64}$ в) $\sqrt[3]{27}$ г) $\sqrt[3]{-8}$

3. Найдите все значения выражений.

а) $\sqrt[3]{-1}$ б) $\sqrt[6]{-64}$ в) $\sqrt[6]{-8i}$ г) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

4. Решите уравнения.

а) $z^4 - 16 = 0$ б) $z^3 = 8$ в) $z^4 + 1 = 0$

5. Решите уравнения.

а) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ б) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

Обобщающие задания

1. Упростите. Результат запишите в виде $a + bi$.

$(5 - 6i) + (3 + 2i)$ $\qquad$ $(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i)$ $\qquad$ $\frac{1 + 4i}{3 + 2i}$ $\qquad$ $\frac{3 + 2i}{1 - 4i}$

$(2 + 5i)\cdot(4 - i)$ $\qquad$ $(1 - 2i)\cdot(8 - 3i)$

2. Найдите квадратный корень комплексного числа.

$2i$ $\qquad$ $-3i$ $\qquad$ $2 - 2i$ $\qquad$ $1 + \sqrt{3}i$

$5i$ $\qquad$ $-6i$ $\qquad$ $2 + 2i$ $\qquad$ $1 - \sqrt{3}i$

3. Запишите корень следующей степени:

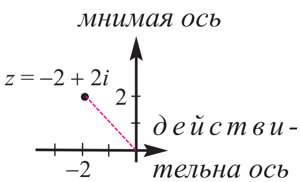
1) Кубический корень

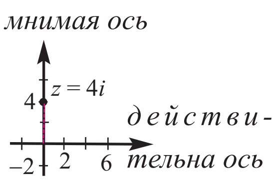
а) $-4\sqrt{2}(1 - i)$ $\qquad$ б) $64\,i$ $\qquad$ в) -27 $\qquad$ г) 1000

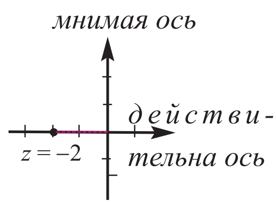
3) Корень 4-ой степени.

а) 1 $\qquad$ б) i $\qquad$ в) $128(-1 + i)\,i$

4. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме.







5. Изобразите комплексное число и запишите в алгебраической форме.

$3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ $\qquad$ $8(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$

$5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ $\qquad$ $7(\cos 0 + i \sin 0)$

$\frac{3}{2}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ $\qquad$ $\frac{1}{4}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

6. Выполните действия.

$[2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})][6(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})]$ $\qquad$ $\frac{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ}$

$[\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})][4(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})]$ $\qquad$ $\frac{2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)}{4(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}$

7. Формула E = I·Z используется в инженерно - электрических устройствах. Здесь E - сила, I- ток, Z -сопротивление. Значение каждой переменной является комплексным числом. Найдите следующие неизвестные.

$I = 10 + 2i$	$I = 2 + 4i$	$E = 15 + 12i$	$E = 12 + 24i$
$Z = 4 + 3i$	$E = 5 + 5i$	$Z = 25 + 24i$	$Z = 12 + 20i$

11

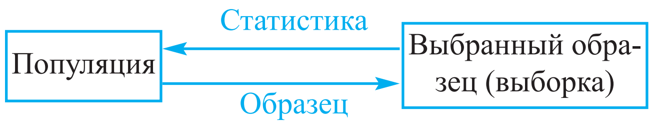
Информация и прогноз

Совокупность и выборка
Случайная выборка и её разновидности
Представление информации
Разложение бинома
Испытания Бернулли

Это интересно. Американский журнал “The Literary Digest” имел хорошую репутацию в прогнозировании итогов выборов президента Америки. Результат 5 предыдущих выборов журнал дал достаточно точно. Однако в 1936 году, была допущена большая ошибка, когда кандидат республиканец Альфред Лэндона не смог победить кандидата демократа Франклина Д.Рузвельта. Как стало ясно потом, причиной этого послужил неверный выбор респондентов для опроса, который проводился среди читателей журнала,большинство из которых были приверженцами Республиканской партии.

Совокупность и выборка

Основные понятия статистики и вероятности дают возможность более глубоко понять события, которые происходят в современном мире. В каждой из двух областей, как объект исследования выбирается совокупность, и выбранные из данной совокупности образцы, или коротко говоря, маленькая группа, называемая выборкой. Статистика, проводя исследование выбранных образцов формирует мнение о всей популяции.



Для проведения статистических исследований, как правило, образцы выбираются случайным образом. В этом случае, каждый образец в совокупности имеет равный шанс при выборке. Существуют различные техники случайной выборки.

- Простая случайная выборка
- Систематическая случайная выборка
- Кластерная случайная выборка
- Разноуровневая случайная выборка

Простая случайная выборка. Предположим, что в классе нужно выбрать группу из трёх человек. Для этого на карточках записываются имена всех учеников, затем эти карточки складываются в ящик, после чего, случайным образом, вытаскиваются три карточки. В этом случае каждый их трёх членов группы имеет одинаковый шанс выбора.

При простой случайной выборке каждый элемент n элементной выборки имеет одинаковый шанс выбора.

Систематическая выборка. Предположим, что руководство большого торгового центра хочет собрать информацию о том, сколько времени покупатели проводят в торговом центре. Было установлено, что центр в течении дня посещают в среднем 2000 человек. Из них случайным образом было выбрано 5% (т.е. 100 человек). Как правильно сделать выборку? Можно опросить людей в день выбора следующим образом: из каждых 20 покупателей опросить каждого 16-го., затем 36-го, 56-го и т.д. Выборка такого вида называется систематической.

Если при систематической выборке предполагается сделать выбор в размере $k\%$, то используется каждый $[\frac{100}{k}]$-ый элемент популяции

Кластерная выборка. Пусть имеется 1000 ящиков по 15 деталей в каждом, и необходимо дать информацию об качестве деталей. Для этого принято решение проверить качество 300 (2%) деталей. Но для того, чтобы вытащить все детали из ящиков, перемешать их и случайно выбрать 300 штук, потребуется много времени и расходов. Из 1000 ящиков можно случайным образом выбрать 20 и проверив все детали из этих ящиков сформировать мнение о всех деталях. Здесь каждый ящик можно считать кластером. Такая выборка называется кластерной выборкой. Необходимо проверить все элементы находящиеся внутри кластера.

При кластерной выборке совокупность состоит из кластеров. Кластер выбирается случайным образом и рассматриваются все элементы кластера.

Разноуровневая выборка. Предположим, что в школе планируется провести опрос среди старшеклассников о том, хотели бы они после уроков заняться чтением художественной литературы в школьной библиотеке. Не желательно проводить опрос среди случайно выбранных учащихся в школьном дворе, так как они могут быть учениками одного и того же класса и т.д. Опрос должен быть проведён случайным образом среди учащихся разных возрастных групп.Такого рода случайная выборка называется разноуровневая(по слоям, по группам). Если в школе в этих классах учится 1265 учеников, из них 385 учится в 8-ом классе, 350 человек - в 9-ом, 280 человек - в 10-ом, 250 человек в 11-ом классе, то для того, чтобы узнать мнение 10 % случайно выбранных учащихся, надо узнать мнение 10% учеников каждого класса, т.е. желательно случайно выбрать 39 из 8-го, 35 из 9-го, 28 из 10-го, 25 из 11-го класса.

При разноуровневой выборке сначала совокупность делится на уровни, а затем проводится случайная выборка на каждом уровне.

При некоторых исследованиях невозможно бывает сделать случайную выборку. Например, диетологам приходится назначать диету не случайно выбранным людям, а тем кто сам захотел этого добровольно.

Верная или неверная выборка. Научно исследовательские институты, занимающиеся опросами не имеют материально технической базы для того, чтобы узнать мнения всех людей по каждому вопросу. Поэтому они ограничиваются изучением этого мнения на небольшой группе людей. Для этого большую роль играет умение правильно определить эти группы. Надёжность представленного на диаграмме исследования также зависит от того, насколько правильно определена группа. Например, невозможно сформировать правильное мнение о том, сколько раз в неделю все горожане занимаются спортом, изучив мнение только тех людей, которые посещают спортивный центр или, прогноз о том, выберут ли кого- то в депутаты парламента не даст правильных результатов, сформировав его, по мнению людей из коллектива, где он работает или живущих с ним в одном районе.

Совокупность и выборка

1. По следующим данным определите совокупность и выборку.

а) Среди 2000 жителей города был проведён опрос от том, кто из 3 кандидатов должен стать мэром города.

б) Чтобы испечь хлеб смешали 300 кг белой и 50 кг чёрной муки. Из 1 кг муки получается 3 буханки хлеба. Из 70 буханок хлеба берутся образцы.

в) Чтобы проверить как увеличивается масса рыбы кутум, фермер проверил 30 рыб из 4 бассейнов.

г) Продавец предложил попробовать новый сорт сыра 40 покупателям (каждому 10 покупателю магазина).

д) Врач - диетолог предлагает на добровольной основе 12 женщинам старше 70 лет приходить в течении двух недель в клинику по утрам, чтобы позавтракать бутербродами, обогащёнными пищевыми волокнами.

2. Какая из следующих выборок сделана верно?

а) Для выбора дежурного в классе, листочки с именами всех детей поместили в ящик из которого вытащили 5 листочков.

б) Модель и цвет школьной формы была выбрана после опроса родителей учащихся 10[а] класса.

в) Чтобы изучить мнение о том, за кого из кандидатов отдадут голоса избиратели, произвели звонки по одному из каждых 15 номеров телефонной книги.

3. Запишите примеры ситуаций с верной и неверной выборкой.

4. Определите технику случайной выборки для каждой из следующих ситуаций.

а) Фирма по воздушным перевозкам сделала подарок при каждому пятому пассажиру при посадке в самолёт.

б) Для проверки уровня преподавания математики в школе случайным образом было выбрано 20 учеников среди выбранных случайным образом 5 разных классов.

в) Для определения мнения об уровне услуг, предоставляемых авиакомпанией был проведён опрос среди пассажиров пяти рейсов, выбранных случайным образом.

г) Для исследовании было опрошено 5 мужчин и 5 женщин, выбранных случайным образом.

д) Диетологи могут высказать мнение о новой диете, с низким содержанием сахара, после наблюдения как минимум за 15 пациентами из каждой возрастной группы 30 - 40, 40 - 50, 50 - 60.

5. Менеджер по продаже ндвижимости планирует проинформировать по телефону о новой скидочной кампании жителей 10 домов на одной улице. На улице имеется 100 домов. Сначала менеджер отметил дома с номера 1 по 10 и позвонил в один из них (например в номер 8). После чего, он позвонил в дома под номерами 18, 28 и т.д.

а) Какую технику случайной выборки использовал менеджер при выборке такого вида?

б) Равны ли шансы выборки всех домов?

в) Чем отличается данная техника от техники простой выборки?

6. Администрация школы планирует определить связь между отметками учащихся по предметам математика и естественным наукам. В оценивании и по предмету математика, и по естественным наукам из 800 учащихся школы принимали участие 350 учеников. Из них, случайным образом, 70 человек планируется вовлечь в специальное оценивание. а) По следующей таблице определите сколько из учащихся каждого класса будут выбраны случайным образом для специального оценивания.

Классы	Количество учащихся
8 класс	90
9 класс	100
10 класс	75
11 класс	85

б) Какой вид техники выборки здесь применяется?

Пример. Если количество выбранных учащихся в общем равно 70 человек, то выборка из каждого класса должна быть пропорциональна. Количество восьмиклассников должно быть: $\frac{x}{70} = \frac{90}{350}$

7. Для деления на группы, каждому из спортсменов выдается карточка с номером от 1 до 5. Участники с одинаковыми номерами образуют группы. Является ли данная выборка случайной? Можно ли считать данный выбор независимым? Что бы предложили бы вы, для более прозрачного выбора?

8. Фирма "Micro Tik" ежемесячно производит 14 500 штук процессоров для компьютеров. Случайным образом были выбраны и проверены 2000 штук, изготовленные в этом месяце. При этом было установлено, что 8 из них оказались с дефектом.

а) Определите совокупность и выборку в данной ситуации.

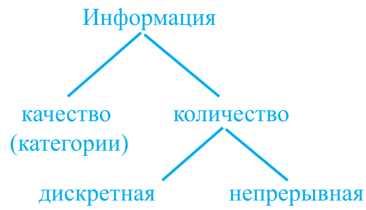
б) По данной информации, можно ли сказать какое количество процессоров, изготовленных в этом месяце, будут с дефектом?

9. Для проведения опроса "Из каких источников вы получаете последние новости?" по республике, случайным образом было выбрано 5 районов, 5 деревень в каждом районе и 5 домов в каждой деревне.

а) Определите совокупность и выборку.

б) Какой технике выборки это соответствует?

Представление информации



Статистическая информация по количественным и качественным характеристикам делится на два вида. **Информация количественного типа** выражается в численном значении. Например, “сколько времени занимаются спортом” ,”чему равен рост” и т.д. Информация качественного вида подразделяется на категории и называется **категориальной информацией.** Например, “название партии”, “цвет глаз”, марка автомобиля” и т.д.

Количественная информация - числовая информация делится на два вида:
1. дискретная, информация которая прерывается;
2. непрерывная информация.

Дискретная числовая информация определяется путём подсчёта. Например, количество пассажиров в автобусе принимает значения 1,2,3 и т.д.

Непрерывная числовая информация принимает различные значения в определённом диапазоне, обычно формируется по результатам измерений. Например, рост, масса и т.д. новорожденных детей.

Для представления информации важно правильно выбрать соответствующую форму графика. Поэтому для представления категориальной и количественной информации выбирается соответствующий график.

Целесообразные формы представления категориальной информации.

Пример 1. Среди 200 учеников был проведён опрос о том, какой вид спорта они любят больше всего. Здесь информация типа вид спорта относится к категориальному виду. В школе имеются секции по следующим видам спорта. Для представления категориальной информации удобно пользоваться таблицей частот, барграфом, круговой диаграммой..

Барграф

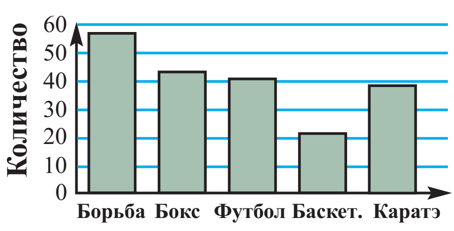
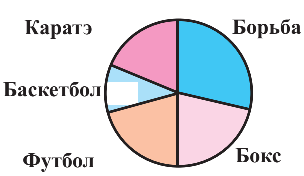


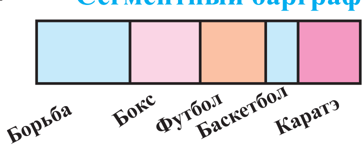
Таблица частот

Вид спорта	Частота
Борьба	57
Бокс	43
Футбол	41
Баскетбол	21
Каратэ	38
Всего	200

Круговая диаграмма



Сегментный барграф



Определяет какую часть от общего (единичного блока) составляет каждая категория. Единичный блок делится на сегменты.

Представление информации

1. 1) Для категориальной информации запишите 3 соответствующие категории.
2) Для числовой информации приблизительно определите и запишите соответствующий интервал.
а) Количество проданных автомобилей по цвету.
б) Количество солнечных часов в день.
в) Количество пропущенных уроков по болезни.
г) Время (в часах), затраченное на выполнение домашнего задания.
д) Количество жидкости, потребляемой человеком за день.

2. Какая числовая информация является дискретной, а какая непрерывной?
а) Изменение температуры в июле.
б) Количество спичек в спичечной коробке.
в) Масса багажа, пассажиров самолёта.
г) Количество пассажиров в вагоне поезда.
д) Количество этажей в домах на улице.
е) Время пользования Интернетом.

3. Среди 24 человек был проведён опрос по поводу того, какой цвет им нравится. При этом были получены следующие результаты: 6 человек - красный, 8 - чёрный, 4 - белый, остальные выбрали другие цвета. Является ли данная информация числовой или категориальной? Представьте информация в виде таблицы частот(с указанием относительной частоты), круговой диаграммы и барграфа.

4. Министерство по черезвычайным ситуациям обнародовало информацию о причинах возникновения пожаров за год. Информация представлена в таблице справа. По таблице постойте круговую диаграмму и сегментный барграф.

Причины	Количество
Малолетние дети	6
Сигареты	4
Газовая плита	10
Электричество	12
По неизвестной причине	8

5. Пусть вам надо провести опрос среди учащихся вашей школы на тему “Какую форму вы выберите для лого фирмы?”

а) Каким образом вы провели опрос? Запишите.
б) Какие классы были выбраны из совокупности?
в) Какая техника была использована вами для выборки?
г) Изначально определите приблизительно какой формы будет лого. Совпадают ли результаты опроса с вашей предположением?
д) График какой формы наиболее приемлем для представления информации? Покажите условие, изобразив информацию.

Представление информации

Целесообразные формы представления числовой информации.

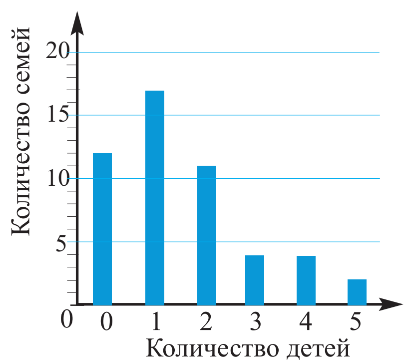
Дискретная числовая информация. Для представления ограниченного количества числовой дискретной информации используют такие формы как **таблица частот, барграф, гистограмма и разветвляющееся дерево.**

Пример 2. Среди 50 молодых семей провели опрос “Сколько детей в вашей семье?”. Ответы представлены ниже.

0 1 2 1 0	3 1 4 2 0	1 2 1 0 5	1 2 1 0 0	1 2 1 2 1
0 1 4 1 0	1 2 5 0 4	1 2 3 0 0	1 2 1 3 4	2 3 2 1 0

Следующие данные показывают количество детей в каждой семье. В таблице это количество показано в столбце или в виде палочек, или в виде числа. По таблице, в одном столбце которой, количество показано палочками, а в другой-числами, задан столбец относительной частоты.

Количество детей	Количество семей(палочками)	Частота (количество семей)	Относительная частота
0	卌 卌 ǁ	12	12 : 50 = 0,24
1	卌 卌 卌 ǁ	17	17 : 50 = 0,34
2	卌 卌 ǀ	11	11 : 50 = 0,22
3	ǀǀǀǀ	4	4 : 50 = 0,08
4	ǀǀǀǀ	4	4 : 50 = 0,08
5	ǁ	2	2 : 50 = 0,04



Группировка дискретной числовой информации. Гистограмма

Пример 3. Ниже приведены результаты оценивания учащихся по предмету Азербайджанский язык в баллах (по 100 бальной системе).

52 66 75 80 52 48 95 85 84 68 86 82 63 78 75 64 79 81 66 53 76 75 69 65

Диапазон изменения числовой информации 48-95. Данную информацию можно сгруппировать в 6 классов размерностью 10 : 40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100.

Оценивание по предмету Азербайджанский язык

Класси	Палочки	Частота
[40, 50)	ǀ	1
[50, 60)	ǀǀǀ	3
[60, 70)	卌 ǁ	7
[70, 80)	卌 ǀ	6
[80, 90)	卌 ǀ	6
[90, 100)	ǀ	1

Представление информации

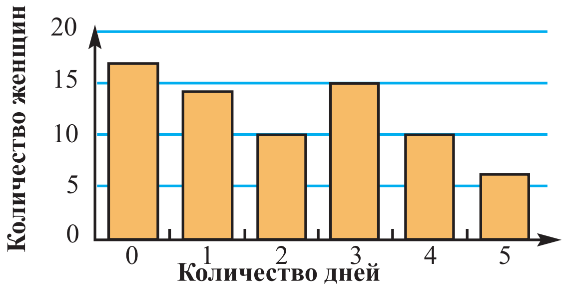
6. Среди женщин города был проведён опрос “Сколько раз в неделю вы ходите в спортивный зал?”. Полученные результаты представлены в виде следующего барграфа.

а) Является ли данная информация непрерывной или дискретной числовой информацией?

б) Определите совокупность и выборку для данной ситуации. Найдите размер выборки по барграфу.

в) Если в опросе приняло участие 92 человека, то о каком количестве в процентах может идти речь, при условии посещения как минимум два раза в неделю?

г) Какова вероятность того, что одна из выбранных женщин посещает зал больше одного раза?



7. Менеджер магазина для определения количества повреждённых коробок яиц при упаковке и перевозке проверил 50 коробок-каждую пятую коробку из 1000.

а) По информации определите совокупность и выборку.

б) Какую технику выборки использовал менеджер?

в) Если при проверке оказалось,что как минимум 5 и как максимум 20 коробок оказались повреждёнными, то какой в общем вывод можно сделать применительно ко всем коробкам?

г) Выберите два вида графика для представления этой информации и постройте их.

8. Следующие данные являются баллами Юсифа в игре на компьютере. Сгруппируйте информацию по классами представьте в виде гистограммы.
580, 490, 520, 650, 540, 600, 630, 590, 390, 410, 670, 480, 400, 440, 560, 540, 430, 670, 490, 720, 580, 680, 590, 370, 470, 540, 490, 660, 500, 600, 390, 540, 300, 350, 600, 540, 510, 410, 480, 560, 330, 490, 540, 540, 580, 540, 270, 450

9. В таблице представлена информация о невыходе на работу работников. По данной информации постройте гистограмму.

больше 1 меньше 3 (1 - < 3)	24
больше 3 меньше 6 (3 - < 6)	16
больше 6 меньше 9 (6 - < 9)	12
больше 9 меньше12 (9 - < 12)	6
больше 12 меньше 15 (12 - < 15)	2
Всего	**60**

Представление информации

“Ствол-листья”. Эту форму удобно применять при небольшом количестве данных. Представление числовой информации в виде ствола и листьев занимает немного времени и даёт возможность более ясно увидеть распределение информации. А форма распределения позволяет с лёгкостью находить ряд статистических величин (моду, медиану, среднее арифметическое, наибольшую разность и т.д.).

Пример 4. Следующие данные отражают результаты оценивания учащихся. 32, 67, 81, 92, 87, 72, 63, 88, 96, 91, 72, 63, 85, 79, 70, 85, 64, 86, 98, 100, 77, 88, 81, 64, 41, 78, 95, 74, 97, 66

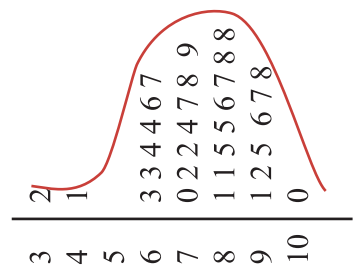
Постройте диаграмму “ствол-листья”, выполнив следующие шаги.

1. Разделите ствол и листья горизонтальной и вертикальной прямой.

2. Ведущая часть числовой информации - большой уровень (или уровни) принимается за ствол с ветками - показывает количество чисел. В данном случае ствол содержит ветки с числами 3,4,5,6,7,8,9,10 и показывает количество десятков.

2. Следующие числа соответствуют листьям. Это цифры, выражающие значения единиц. На каждую “ветку” последовательно записываются “листья”.

Ствол с ветками	**Листья** 3|2 = 32
3	2
4	1
5	
6	3 3 4 4 6 7
7	0 2 2 4 7 8 9
8	1 1 5 5 6 7 8 8
9	1 2 5 6 7 8
10	0



10. По условию телевизионного конкурса ответ участника, который даёт ответ быстрее всех в течении минуты после того как прозвучал вопрос выводится на экран, после чего он продолжает состязаться один на один с ведущим. При этом были получены следующие (в секундах) результаты. Представьте информацию в диаграммы “ствол-листья”.

37, 33, 33, 32, 29, 28, 28, 23, 22, 22, 22, 21, 21, 21, 20, 20, 19, 19, 18, 18, 18, 18, 16, 15, 14, 14, 14, 12, 12, 9, 6

11. Представьте в виде диаграммы “ствол-листья” возраст работников фирмы.
а) Найдите среднее арифметическое, моду и медиану; б) Представьте информацию в виде таблицы частот.

Ствол	**Листья**
2	1 3 5 8 8
3	1 2 2 3 3 5 9
4	3 5 7
5	0 2 2
6	1

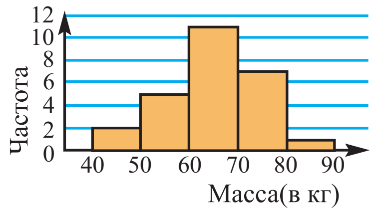
2|1 = 21 год

Представление непрерывной числовой информации.

Формы представления непрерывной числовой информации схожи с формами сгруппированной дискретной информацией. Некоторая непрерывная числовая информация принимается как дискретная (и наоборот). То есть границу между ними определить очень трудно.

Пример 5. В результате проведённых исследований стало известно, что масса молодых людей, занимающихся спортом в клубе колеблется от 40 кг до 90 кг. Более подробная информация представлена в виде таблицы и гистограммы.

Интервал массы	Частота
40 – < 50	2
50 – < 60	5
60 – < 70	11
70 – < 80	7
80 – < 90	1



12. Работниками фирмы разрешается говорить по телефону максимум 3 минуты. В течении дня в фирме были зафиксированы следующие разговоры.

2,4; 0,2; 3,0; 2,8; 1,5; 1,9; 0,7; 1,0; 2,5; 1,3;0,8; 2,1; 3,0;

0,4; 1,2;3,0; 1,1; 0,3; 0,7; 1,8; 0,3; 1,0; 21; 3,0; 2,9; 0,5; 1,4;

3,0; 2,8; 1,2; 0,5; 1,0; 1,5; 0,9; 1,8; 0,6; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8

а) Представьте информацию в виде диаграммы “ствол-листья”.

б) Объедините информацию в 4 класса и представьте её в виде таблицы частот и гистограммы.

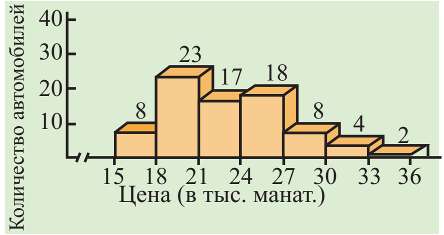
в) Какую часть составляют звонки меньше минуты от всех звонков? Какие статистические показатели для этого использовались?

13. Таблица частот показывает продолжительность пребывания автомобиля на стоянке. Постройте гистограмму по таблице.

Продолжительность	6-25	26-45	46-65	66-85	86-105	106-125	126-145
Частота	60	70	90	120	80	50	40

14. Гистограмма отражает информацию о количестве проданных автомобилей и цене. По данной информации постройте таблицу частот. Классы определите как 15 - < 18.

Сколько процентов всех проданных автомобилей составляют автомобили цена которых больше 18 и меньше 27 тысяч.



15. **Маленький проект.** В 2016 году в Баку впервые проходили соревнования Гран При Европы Формулы 1. Гоночный трек (длина одного оборота) в Баку, длиной приблизительно 6 км, проходил как через старую часть города, так и современную часть.

Распределения первых 3 мест первого Гран При Европы Формулы 1 в Баку показаны в таблице.

Место	№	Пилот	Команда	Оборот	Время	Балл
1	6	Нико Росберг	Мерседес	51	1:32:52.366	25
2	5	Себастьян Феттел	Ферари	51	+16.696 сек.	18
3	11	Серхио Перес	Форс Индия	51	+25.241 сек.	15

а) Сколько километров преодолел каждый пилот?

б) В таблице показано на сколько больше времени потратил каждый пилот на преодоление трассы от основного чемпионского времени. В столбце время вычислите время, затраченное каждым пилотом на преодоление трассы и перечертите таблицу в тетрадь.

в) При помощи калькулятора, вычислите среднюю скорость каждого пилота.

г) Составьте таблицу распределения трёх первых мест в соревнованиях Формулы 1 в Баку, проходивших в 2017 году.

д) Постройте барграф с соответствующими результатами пилотов в 2016 и 2017 годах.

е) Создайте презентацию из фотографий, о проходивших в Баку соревнованиях Гран При Формулы 1. Постарайтесь собрать дополнительную информацию о командах, автомобилях и пилотах, которые принимали участие в соревнованиях.

Разложение бинома

Биномом называется двучлен. Рассмотрим различные степени бинома. В разложении квадрата и куба суммы существует определённая закономерность.

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Так, показатель степени первого члена равен степени бинома, показатель каждого следующего первого члена a уменьшается на единицу, а второго члена b возрастает на единицу. Коэффициенты первого и последнего членов равны 1.

Последовательность степеней суммы a и b можно продолжить последовательно разлагая бином. Проследим по какому правилу производится разложение.

$(a+b)^4$ можно записать как $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$.

Произведение каждого a или b равно сумме всех различных произведений четырех множителей.Рассмотрим последовательность из этих вариантов.

- возьмём 0-ой множитель члена *b и 4-ый* множитель члена *a*.

Получим член a^4 и такой ${}_4C_0$ или 1 возможный вариант, и коэффициент этого члена равен 1.

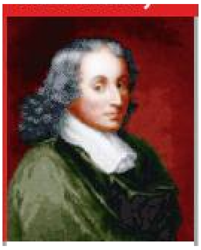
- возьмём 1-ый множитель члена *b и 3-ый* множитель члена *a*. Получим член a^3b и такой ${}_4C_1$ или 4 возможных варианта, и коэффициент этого члена равен 4.
- возьмём 2-ой множитель члена *b и 2-ой* множитель члена *a*. Получим член a^2b^2 и такой ${}_4C_2$ или 6 возможных варианта, и коэффициент этого члена равен 6.
- возьмём 3-ий множитель члена *b и 1-ый* множитель члена *a*. Получим член ab^3 и такой ${}_4C_3$ или 4 возможных варианта, и коэффициент этого члена равен 4.
- возьмём 4-ый множитель члена *b и 0-ой* множитель члена *a*. Получим член b^4 и такой ${}_4C_4$ или 4 возможных варианта, и коэффициент этого члена равен 1.

Разместим степени биномов, биномиальные разложения и коэффициенты членов в таблицу.

Бином	Выражение разложения бинома	Треугольник Паскаля
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1

Как видно расположения коэффициентов обладают интересным математическим свойством и образуют треугольник Паскаля.

Разложение бинома



Треугольник Паскаля. Треугольник Паскаля назван в честь его создателя известного французского математика Блеза Паскаля, жившего в XVI веке. Вершиной треугольника является 1. Каждая строка, образующая треугольник, начинается и заканчивается с единицы. Каждое число в следующей строке, равно сумме двух соседних чисел предыдущей строки. Количество членов каждой строки больше предыдущей на одно число.

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Треугольник Паскаля	Комбинезоны треугольника Паскаля
1	$_0C_0$
1 1	$_1C_0$ $_1C_1$
1 2 1	$_2C_0$ $_2C_1$ $_2C_2$
1 3 3 1	$_3C_0$ $_3C_1$ $_3C_2$ $_3C_3$
1 4 6 4 1	$_4C_0$ $_4C_1$ $_4C_2$ $_4C_3$ $_4C_4$
1 5 10 10 5 1	$_5C_0$ $_5C_1$ $_5C_2$ $_5C_3$ $_5C_4$ $_5C_5$

Проверим соответствует ли в действительности член $_5C_2$ пятой строке треугольника Паскаля.

$$_5C_2 = \frac{_5P_2}{2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2} = 10$$

Степени биномов	Разложение	Треугольник Паскаля
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$_1C_0a + {_1C_1}b$	1 1
$(a+b)^2$	$_2C_0a^2 + {_2C_1}ab + {_2C_2}b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$_3C_0a^3 + {_3C_1}a^2y + {_3C_2}ab^2 + {_3C_3}b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$_4C_0a^4 + {_4C_1}a^3b + {_4C_2}a^2b^2 + {_4C_3}ab^3 + {_4C_4}b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$_5C_0a^5 + {_5C_1}a^4b + {_5C_2}a^3b^2 + {_5C_3}a^2b^3 + {_5C_4}ab^4 + {_5C_5}b^5$	1 5 10 10 5 1

Коэффициенты членов в разложении бинома являются последовательными числами треугольника Паскаля в соответствующей строке. Слева направо степень первого члена равна степени бинома, в каждом следующем члене разложения степень множителя *a* уменьшается на единицу, а степень множителя *b* на единицу увеличивается.

Разложение бинома

6-ая строка треугольника Паскаля формируется следующим образом.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ {}_6C_0 & & {}_6C_1 & & {}_6C_2 & & {}_6C_3 & & {}_6C_4 & & {}_6C_5 & & {}_6C_6 \end{array}$$

Можно записать общую форму для биномиального разложения.

Разложение бинома

Для произвольных чисел a, b и числа $n \geq 0$ справедливо равенство:
$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_{n-1}\, a^1 b^{n-1} + {}_nC_n a^0 b^n$

В более короткой форме эту формулу можно записать при помощи знака "Σ" ***сигма***.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

В разложении бинома $(a+b)^n$ существует $n+1$ член. Любой $(k+1)$ член имеет вид $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

- в разложении бинома *n-ой* степени присутствует $n+1$ член
- любой биномиальный член можно найти по формуле $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$
- сумма степеней любых членов равна n
- сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots \quad + {}_nC_{n-1} \; + {}_nC_n = 2^n$$

Проверьте последнее равенство для $a = b = 1$.

При разложении степеней бинома коэффициенты слагаемых отличаются от биномиальных коэффициентов.

Пример. $(x+2)^5 = {}_5C_0 \cdot x^5 + {}_5C_1 \cdot x^4 \cdot 2 + {}_5C_2 \cdot x^3 \cdot 2^2 + {}_5C_3 \cdot x^2 \cdot 2^3 + {}_5C_4 \cdot x \cdot 2^4 + {}_5C_5 \cdot 2^5 =$
$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

Например, в данном разложении коэффициент третьего слагаемого равен 40, а его биномиальный коэффициент равен ${}_5C_2 = 10$.

Пример. найдём четвёртый член разложения бинома $(2p-1)^6$
Решение: Здесь $a = 2p$, $b = -1$, $n = 6$, тогда

$$T_4 = T_{3+1} = {}_6C_3 \cdot a^{6-3} \cdot b^3 = 20 \cdot (2p)^3 \cdot (-1)^3 = -160p^3$$

Обучающие задания

1. Сколько членов в разложении следующих биномов?

а) $(x-3y)^5$ б) $(2z+3z^2)^7$ в) $(c+6)^q$ г) $(c+6)^{k-2}$

2. Запишите следующие разложения.

а) $(x-3)^4$ б) $(x+2)^5$ в) $(1+2c)^6$ г) $(1-i)^5$

Разложение бинома

3. Найдите следующие члены бинома.

а) 5 член для $(x + y)^8$

б) 4 член для $(a - 2b)^6$

в) 7 член для $(1 - 2z)^{12}$

г) средний член для $(2x + y)^5$

д) 2 член с конца для $(u^2 + 1)^8$

е) 3 член с конца для $(x - y)^{10}$

4. Не разлагая бином $(x + y)^{10}$ найдите:

а) Количество членов в разложении бинома.

б) 6 член в разложении бинома

г) Какому члену принадлежит биномиальный коэффициент ${}_{10}C_r$ с наибольшим значением?

5. Запишите биномиальное разложение в виде $(a + b)^n$, $n \in$ N.

а) ${}_4C_0z^4 + {}_4C_1z^3t + {}_4C_2z^2t^2 + {}_4C_3zt^3 + {}_4C_4t^4$

б) ${}_5C_0m^5 + {}_5C_1m^4y + {}_5C_2m^3y^2 + {}_5C_3m^2y^3 + {}_5C_4my^4 + {}_5C_5y^5$

6. Запишите схожие и различные свойства биномиальных разложений $(x + y)^3$ и $(x - y)^3$. Обобщите полученное для $(x - y)^n$.

7. Выразите через комбинезоны следующие строки треугольника Паскаля.

а) 1 5 10 10 5 1

б) 1 7 21 35 35 21 7 1

в) 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

8. Ильгар утверждает, что каждую строку треугольника Паскаля можно выразить в виде 11^n. Проверьте утверждение Ильгара.

Выполните для треугольника Паскаля

9. а) Найдите сумму членов каждой строки треугольника Паскаля.

б) Найдите сумму членов 9 строки треугольника Паскаля.

в) Найдите сумму членов n-ой строки треугольника Паскаля.

г) Примените это свойство при разложении биномиальных коэффициентов.

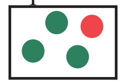
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

10. а) Найдите коэффициент второго члена, если сумма биномиальных коэффициентов в разложении бинома $(x + 2)^n$ равна 16.

б) Найдите в разложении $(x + \frac{1}{x})^8$ член не зависящий от x.

Испытания Бернулли

Для того, чтобы понять схему Бернулли рассмотрим следующий пример.



Если в игре вероятность выигрыша(появления зелёного шарика) равна $\frac{3}{4}$, то вероятность проигрыша (появления красного шарика) равна $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Вычислим вероятность изменения числа побед и поражений в 4 играх.

1) P(вероятность выигрыша во всех 4 играх) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

2) P(вероятность проигрыша во всех 4 играх) $=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$

3) Найдём варианты выигрыша в 3 из 4 игр и соответствующую вероятность:

(В,В,В,П) P(выигрыш во всех играх кроме 4) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$

(В,В,П,В) P(выигрыш во всех играх кроме3) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(В,П,В,В) P(выигрыш во всех играх кроме 2) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(П,В,В,В) P(выигрыш во всех играх кроме 1) $=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

Количество вариантов победы игрока в 3 из 4 игр можно вычислить при помощи комбинезона ${}_4C_3=\frac{4!}{3!}=4$. Вероятность вариантов имеет равные возможности $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1$. Тогда вероятность этого события можно вычислить так:

$$P(\text{выигрыш в 3 из 4 игр}) = {}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{108}{256}$$

Аналогичным образом исследуются другие ситуации.

4) Выигрыш в 2 играх из 4.

$$P(В,В,П,П) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}$$

Количество возможных вариантов выигрыша в 2 играх из 4:

${}_4C_2=\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$ То есть вероятность победы в каждом из 6 случаев $\frac{9}{256}$.

$$P(\text{выигрыш в 2 из 4 игр}) = {}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{54}{256}$$

5) Вероятность победы в 1 из 4 игр.

$$P(В,П,П,П) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{256}$$

$$P(\text{выигрыш в 1 из 4 игр}) = {}_4C_1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{64}=\frac{12}{256}$$

Мы нашли вероятности выигрыша команды в 4, 3, 2, 1, 0 играх. Если эти вероятности вычислены верно, то их сумма должна равняться единице.

P(4 выиг.) + P(3 выиг.) + P(2 выиг.)+ P(1 выиг.)+ P(0 выиг.) =1.

Выполним проверку: $\frac{81}{256}+\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=1$

Испытания Бернулли

Представленная задача называется биномиальными испытаниями, так как в задачах такого типа в соответствии с ситуацией возможно использовать члены биномиального разложения. Например, задача выше соответствует разложению биномиальных членов $(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b +$ $+ {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$. Иногда их называют испытаниями Бернулли. Для данной задачи введём переменные p (выигрыш) и q (проигрыш). При биномиальном разложении можно увидеть соответствие каждого члена реальной ситуации . $(p+q)^4 = {}_4C_0p^4 + {}_4C_1p^3q + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3pq^3 + {}_4C_4q^4$

Здесь p вероятность успеха (появление красного шара) и $p = \frac{3}{4}$, q вероятность неудачи (появление зелёного шара) $q = \frac{1}{4}$.

Испытания Бернулли и вероятность

Если для n независимых испытаний вероятность успешного события p, тогда m вероятность успеха, n - m вероятность неудачи и

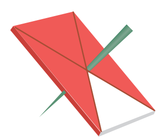
$$P(n \text{ испытаний}, m \text{ успех}) = {}_nC_mp^mq^{n-m}.$$

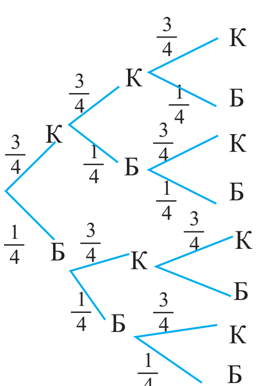
Биномиальное распределение или испытания Бернулли справедливы только при следующих условиях.

- У каждого испытания есть только два результата.
- Известно количество испытаний.
- Испытания независимы.
- Все испытания равновероятны.

Исследуем испытания Бернулли схематично на следующем примере.

Пример 1. Колесо состоит из 4 одинаковых частей - 3 части красные и одна белая. При вращении колесо может остановиться или на красной части или на белой. На схеме представлены возможные положения колеса при трех вращениях.





ККК	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
ККБ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
КБК	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
КББ	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
БКК	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
БКБ	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
ББК	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
БББ	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$P(3 \text{ красн.}) = 1 \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$P(2 \text{ красн}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$

$P(1 \text{ красн}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$P(0 \text{ красн}) = 1\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Как видно, коэффициенты равны числам 3 строки треугольника Паскаля:

1 3 3 1

Также возможно увидеть связь с биномиальным разложением $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Здесь $a = \frac{1}{4}$ и $b = \frac{3}{4}$.
Для этих событий проверьте формулу Бернулли для $P(m \text{ красн.}) = {}_3C_m \left(\frac{3}{4}\right)^m\left(\frac{1}{4}\right)^{3-m}$, при $m = 0,1,2,3$.

Испытания Бернулли

Пример 2. Для каждого из 5 вопросов существует 4 варианта ответа. Найдите вероятность того, что Наргиз ответила верно на 4 вопроса. Установите связь между вероятностью и биномиальным разложением.

Решение: Найдём возможные варианты, что Наргиз даст 5 верных или не верных ответов:

$(п + н)^5 = {}_5C_0 п^5 + {}_5C_1 п^4 н + {}_5C_2 п^3 н^2 + {}_5C_3 п^2 н^3 + {}_5C_4 п н^4 + {}_5C_5 н^5$

Из схемы видно, что существует 5 различных вариантов 4 верных ответов на 5 вопросов. Значит, вероятность этого события будет ${}_5C_1 d^4 s$. Аналогичным образом можно увидеть связь между другой ситуацией и биномиальными членами.

н	п	п	п	п
п	н	п	п	п
п	п	н	п	п
п	п	п	н	п
п	п	п	п	н

Обобщим эту связь при помощи таблицы.

Коэффициент	Член	Смысл ситуации
${}_5C_0 = 1$	$п^5$	1 вариант, что все 5 ответов правильные
${}_5C_1 = 5$	$п^4 н$	5 вариантов, что 4 правильных, 1 неправильный
${}_5C_2 = 10$	$п^3 н^2$	10 вариантов, что 3 правильных, 2 неправильных
${}_5C_3 = 10$	$п^2 н^3$	10 вариантов, что 2 правильных, 3 неправильных
${}_5C_4 = 5$	$п н^4$	5 вариантов, что 1 правильный, 4 неправильных
${}_5C_5 = 1$	$н^5$	1 вариант, что все 5 ответов неправильные

Найдём, случайным образом, вероятность 4 правильных и 1 неправильного ответов. Вероятность каждого правильного ответа $\frac{1}{4}$, вероятность неправленого $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(4п, 1н) = 5п^4н = 5\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \quad \text{или} \approx 1{,}5\%$$

Аналогично, найдите вероятность всех возможных ситуаций, сложите их и найдите их сумму. Проверьте, что данная сумма равна 1 (или 100%).

Пример 3. Найдите вероятность того, что в одной из четырёх семей , в которых есть дети, есть 3 мальчика и 1 девочка.

Решение: Для каждого ребёнка существует два возможных варианта: или мальчик или девочка. Вероятность каждого из двух равна $\frac{1}{2}$.

$P(n \text{ испытаний}, m \text{ успех}) = {}_nC_m p^m q^{n-m}$. $n = 4$, $m = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;

$P(4 \text{ ребёнка}, 3 \text{ мальчика}) = {}_4C_3 p^3 q^{4-3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Значит, вероятность того, что из 4 детей 3 мальчики, равна $\frac{1}{4}$ или 25%.

В биномиальном разложении член соответствующий ситуации показан красным цветом. $(м + д)^4 = м^4 + 4м^3д + 6м^2д^2 + 4мд^3 + д^4$ P(4 ребёнка, 3 мальчика)

Испытания Бернулли

Пример 4. Фирма проводит акцию по продаже детского питания. В каждую коробку был положен купон так, что 3 из каждых 20 являются выигрышными. Какова вероятность того, что среди 5 коробок детского питания 2 окажутся с выигрышными купонами? При вычислениях можно использовать калькулятор.

Решение: успешным событием является наличие выигрышного купона:

Р (есть купон с выигрышем) $= \dfrac{3}{20}$

Неудачным событием, отсутствие купона с выигрышем:

Р (нет купона с выигрышем) $= 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$

Р (5 коробок 2 выигрыша) $= {}_5C_2 p^2 q^3 = 10 \left(\dfrac{3}{20}\right)^2 \left(\dfrac{17}{20}\right)^3 \approx 0{,}138$

Пример 5. Монету подбросили 10 раз. Какова вероятность того, что как минимум 8 раз монета упадёт цифрой?

Решение: если событие, что монета упадёт как минимум 8 раз цифрой является успешным, значит, если цифра выпадет и 9 и 10 раз, то эти события также будут успешными. Найдём вероятности каждого события в отдельности и сложим их. Вероятность каждого события $\dfrac{1}{2}$.

Р (как минимум 8 раз цифрой) = Р (8 цифрой) + Р (9 цифрой) + Р (10 цифрой)

Р (как минимум 8 раз цифрой) $= {}_{10}C_8 p^8 q^2 + {}_{10}C_9 p^9 q^1 + {}_{10}C_{10} p^{10} q^0 =$

$$= 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{56}{1024} \approx 0{,}55$$

1. Какие события можно назвать биномиальным распределением?

а) Кямал на 20 тестов по предмету химия даёт ответы случайным образом, выбирая один из четырёх.

б) Пластиковый стакан подбрасывают 50 раз и считают сколько раз он упадёт на лицом вверх и лицом вниз .

в) Игральный кубик подбрасываю 100 раз и проверяют равна ли вероятность того, что он выпадет каждой гранью равное количество раз.

г) Игральный кубик подбрасывают 100 раз и проверяют сколько раз на верхней грани выпадет число 4.

2. Монету подбрасывают 5 раз. Какова вероятность, что на верхней грани окажется цифра:

а) Р (1 раз); б) Р(3 раза); в) Р(4 раза); г) Р(0 раз); 9) Р (2 раза)

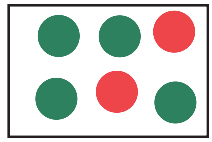
3. Вероятность выигрыша баскетбольной команды равна $\dfrac{2}{3}$. Какова вероятность, что команда в следующих 5 играх выиграет 3?

4. Последние исследования показывают, каждый из 3 новых автомобилей продаётся в кредит. Вычислите вероятность,что из 4 выбранных случайным образом автомобилей 3 были куплены в кредит.

Испытания Бернулли

5. При проверке оказалось, что 2% деталей, изготавливаемых на конвейере за один период оказались бракованными. Найдите вероятность,что из 5 взятых случайным образом деталей бракованными окажутся:
а) P(только 2) б) P(как максимум 1) в) P (как максимум 2)

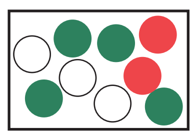
6. В коробке 6 шаров. Запишите соответствующее биномиальное разложение для ситуаций, если из коробки вытаскивают 6 шаров. Успешным событием является появление зелёного шара. Заполните таблицу в тетради. Проверьте решения, зная , что сумма вероятность всех событий равна 1.



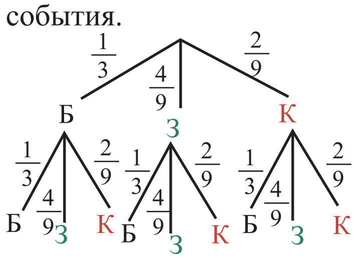
Ситуация	Биномиальный член
6 зелёных	${}_6C_0p^6$
5 зелёных 1 красный	${}_6C_1p^5q^1$
4 зелёных 2 красных	${}_6C_2p^4q^2$
. . .	. . .
Биномиальное разложение: $(p + q)^x = ...$	

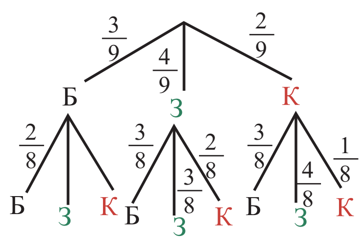
7. Из 1000 CD дисков при проверке 50 оказались бракованными.
а) Какова вероятность того, что выбранный случайным образом диск будет бракованным?
б) Если контролёр, проверяющий качество взял, случайным образом, 6 дисков, то вычислите вероятность соответствующую ситуации, что бракованными оказались:
• всего 2 диска; • как максимум 2 диска;• как минимум 3 диска.

8. В ящике 3 белых, 4 зелёных, 2 красных шара. Если случайным образом вытащить два шара, то: а) чему равна вероятность, что оба не будут белыми? Сумме скольких событий равно данное событие?



б) используя схему, вычислите вероятность, что оба шара окажутся белыми. Какие события отражает схема? Запишите в письменной форме примеры, показывающие общие и различные характеристики данного события.





Обобщающие задания

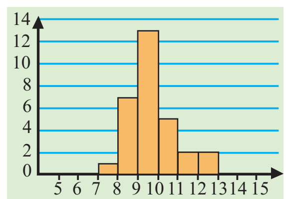
1. Из коробки, в которой 2 красных и 3 белых шара случайно берут шар, который затем возвращают в коробку. Испытание повторяют 3 раза.
а) Найдите вероятность, что в 1-ый и 2-ой шар окажутся белыми, а 3-ий шар будет красным.
б) Найдите вероятность, что из 3-х шаров 2 белого цвета.

2. Монету подбросили 4 раза. Найдите вероятность следующих событий.
а) P(4 раза вверх гербом) б) P(как минимум 3 раза вверх цифрой)
в) P (как максимум 2 раза вверх гербом) г) P(0 раз вверх цифрой)

3. Запишите разложение бинома $(г + ц)^5$ событий при подбрасывании монеты. Объясните ситуацию, соответствующую каждому члену бинома. Вычислите вероятность соответствующих событий.

4. Докажите, что ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$. Проверьте тождество для следующих значений: $n = 7$, $k = 5$.

5. На гистограмме показана масса индюшек на ферме. По данным гистограммы, составьте таблицу частот. Какова вероятность того, что при выборе случайным образом двух индюшек, их масса будет больше 10 кг?



6. Из коробки в которой 4 белых и 2 зелёных шара, случайным образом вытаскивают 3 шара.
а) Какое событие более вероятно (в соответствии с цветом)?
б) Найдите вероятность, что из 3-х шаров как минимум 2 будут белыми.

7. Сколько различных вариантов прочтения можно составить из букв слова?
а) ТУРАН б) ГАБАЛА

8. Вероятность того, при каждом выстреле стрелок поразит цель равна 0,8. Производится 4 выстрела. Найти вероятность 2-х попаданий.

9. Мустафа хочет позвонить другу, но забыл 2 последние цифры номера. Найдите вероятность того, что Мустафа наберёт номер правильно с первого раза, если известно, что цифры, которые забыл Мустафа разные.

10. Как пять человек(A, B, C, D и E) могут различными способами быть построены в ряд, при условии, что:
а) E стоит посередине;
б) A и B обязательно стоят рядом;
в) A и B не будут стоять рядом.

Обобщающие задания

1. Цена автомобиля после его покупки в первый год снижается на 20%, а в каждый последующий год на 8%. Сколько будет стоить атомобиль, купленный в 2015 году за 25 тыс. манат в 2022 году?

2. В классе 19 учеников. Из них 10 человек занимаются шахматами, 7 футболом, 3 человека занимаются в обоих кружках. Сколько учеников не занимается ни в одном кружке?

3. Имеется два вида стали с 5% и 2% содержанием никеля. Сколько килограмм стали двух сортов надо взять, чтобы получить 360 кг стали с 2,5 % содержанием никеля?

4. При каких значениях c следующие неравенства справедливы при всех значенях x?

а) $x^2 + cx + 4 > 0$ б) $x^2 + 3x + c > 0$

5. Последовательность задана реккурентной формулой $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$ Запишите формулу n-го члена.

6. Фермер, применяя новые технологии, добился повышения урожая на один и тот же процент ежегодно, и за 2 года урожай вырос с 150 тонн до 216 тонн. На сколько процентов ежегодно изменялся урожай?

7. а) Вычислите: $\sqrt[3]{(2\sin 60^\circ - 1)^3} - \sqrt{(1 - \operatorname{tg} 60^\circ)^2}$

б) Упростите значение выражения $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, при $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

8. а) Если $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$, $\sin\beta = -\dfrac{9}{41}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$. Найдите угол $\alpha - \beta$.

б) Если $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$. Найдите угол $\alpha + \beta$.

в) Если $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$, то найдите значение выражения $(1 + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(1 + \operatorname{tg}\beta)$.

9. Найдите значение выражения.

а) $\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$

10. Даны $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sin x$. Найдите:

а) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

11. Дана функция $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

а) Найдите область определения функции.

б) Решите неравенство $f(x + 1) \geq 0$.

Обобщающие задания

12. Решите уравнения.

а) $4\cos^2 x - 3\sin x = 3$ б) $2\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x - 1 = 0$

в) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ г) $\cos 3x - \cos 4x = 1 - \cos x$

13. Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку.

а) $\sin x = -1,\ x \in [0; 4\pi]$ б) $\cos x = 1,\ x \in [-\pi; 3\pi]$

14. Решите неравенства.

а) $\cos^2 x + \dfrac{1}{2} > \sin^2 x$ б) $\mathrm{tg}\,2x < \sqrt{3}$

15. а) Для функции $y = 3 + \sqrt{x-4}$ найдите обратную функцию.

б) Для функции $y = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}$ найдите область определения.

в) Для функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(5 + 3\cos x)$ найдите множество значений.

16. При каких значениях x числа $\ln(x-9)$, $\ln(x-7)$, $\ln(x-3)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

17. Найдите обрбатную функцию. Для заданной и обратной функции покажите область определения и множество значений.

а) $y = 2^{x-1} + 3$ б) $y = 1 + \log_2(x+3)$

18. Решите уравнения.

а) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \dfrac{1}{64}$ б) $0{,}2^{x-1} - 0{,}2^{x+1} = 4{,}8$

в) $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$ г) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

д) $\log_{x-1} 2 = -0{,}5$ е) $\log_5(2 + \log_3(3+x)) = 0$

ж) $\log_2(2^{2x} + 16^x) = 2\log_4 12$ з) $\log_5 3 = -\dfrac{\log_2(1+x)}{\log_2 5}$

и) $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$ к) $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$

19. Решите неравенства.

а) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{2x} < 5\dfrac{4}{9}$ б) $0{,}9^x \geq 1\dfrac{19}{81}$

в) $(x^2 - 2x - 3)\cdot(2^x - 8) \leq 0$ г) $2^{\mathrm{tg}\,x} > \sin\dfrac{5\pi}{6}$

д) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{9}} 27$ е) $\dfrac{\log_3(6-2x)}{\log_{0,3} 5} > 0$

ж) $\log_3(2x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0$ з) $\log_{\frac{1}{2}}|3-x| > -1$

20. Вычислите.

а) $\left(\cos\dfrac{\pi}{15} - i\cdot\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^{10}$ б) $\left(\sin\dfrac{4\pi}{9} - i\cdot\cos\dfrac{5\pi}{9}\right)^{27}$

Обобщающие задания

21. Разложите многочлен $x^4 + 4x^2 - 5$ на линейные множители.

22. На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в данных точках?

23. В ящике 30 чёрных и x белых шаров. Если вероятность того, что случайно выбранный шар белого цвета равна $\frac{2}{5}$, то найдите x.

24. Вычислите сумму

$$2^0 \cdot {}_6C_0 + 2^1 \cdot {}_6C_1 + 2^2 \cdot {}_6C_2 + 2^3 \cdot {}_6C_3 + 2^4 \cdot {}_6C_4 + 2^5 \cdot {}_6C_5 + 2^6 \cdot {}_6C_6.$$

25. Через конец рёбер, выходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда с размерами 2 см, 4 см и 7 см проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

26. а) Дано:

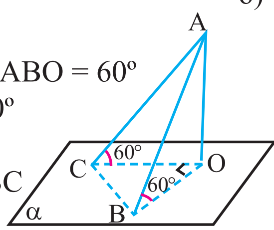
$AO \perp \alpha$

$\angle ACO = \angle ABO = 60^\circ$

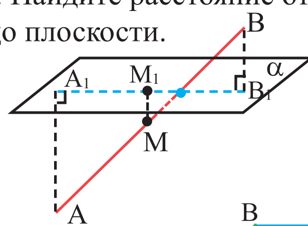
$\angle COB = 90^\circ$

$AO = 3$

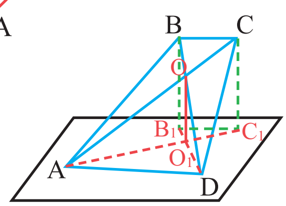
Найдите: BC



б) Концы отрезка AB пересекающего плоскость находятся на расстоянии 16 см и 4 см. Найдите расстояние от середины M до плоскости.

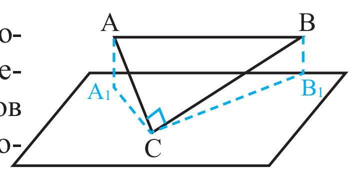


27. а) Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости α. Основание BC находится на расстоянии 5 см от плоскости. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, если AD:BC = 7:3



б) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 9 см, полная поверхность 144 см^2. Найдите сторону основания и боковое ребро.

28. На расстоянии 1 см, через прямой угол прямоугольного треугольника паралелллльно гипотенузе проведена плоскоскость. Проекции катетов на плоскость равны 3 см и 5 см. Найдите проекцию гипотенузы на плоскость.



29. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, площади боковых граней соответственно 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2. Найдите объём призмы.

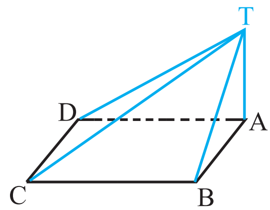
30. Найдите область определения функций.

а) $y = \dfrac{x+5}{x^2 - 3x + 4}$ б) $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}x - 4}$

31. Найдите косинус меньшего угла треугольника со сторонами 4 см, 5 см и 6 см.

Обобщающие задания

32. Из вершины A прямоугольника ABCD к плоскости прямоугольника восстановлен перпендикуляр AT. Найдите длину AT, если TB = 6 см, TD = 7 см, TC = 9 см.



33. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 + m)x + m - 3 = 0$ будет наименьшей?

34. Дорога из пункта A до пункта B состоит из подъёма и спуска. Длина дороги на подьёме составляет 12 км, а на спуске 24 км. Всадник преодолел путь от пункта A до пункта B за 7 часов, и обратный путь за 8 часов. Найдите скорость при подъёме и спуске.

35. Представьте графическое решение системы $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ и определите:

а) при каких положительных значениях a система имеет два решения;
б) при каких значениях a система может иметь три решения;
в) существуют ли значениях a , при которых система имеет четыре решения?

36. На трёх складах 920 т зерна. На первом складе зерна на 30 кг меньше, чем на втором, масса зерна на втором и третьем складе оносится как 8 : 9. Сколько тонн зерна на каждом складе?

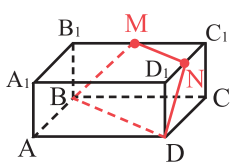
37. Стороны треугольника равны 10 см и 12 см, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите периметр треугольника. Сколько решений имеет данная задача?

38. Найдите биссектрисы треугольника со сторонами 5 дм, 6 дм и 7 дм.

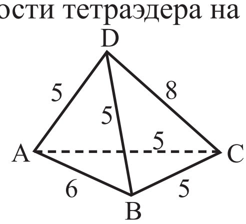
39. Найдите медианы треугольника со сторонами 5 см, 6 см и 7 см.

40. Найдите амплитуду, частоту и основной период гармонического колебания, заданного формулой $y = -2\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$.

41. Дано: правильная четырёхугольная призма
$B_1M = MC_1$
$C_1N = ND_1$
$AB = BC = 8$
$AA_1 = 4$
Найдите: площадь четырёхугольника BMND



42. Найдите площадь полной поверхности тетраэдера на рисунке.



43. Найдите стороны основания правильной четырёхуглььной пирамиды, если боковое ребро равно 5 см, а площадь полной поверхности равна 84 см^2.

Обобщающие задания

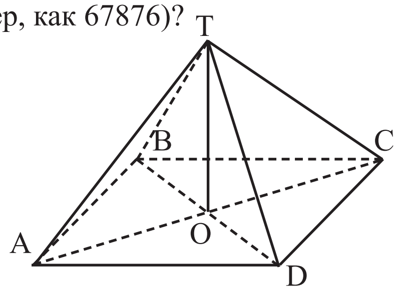
44. Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, если её диагональ равна 6 см, а площадь боковой поверхности 32 см^2.

45. Найдите координаты точек, принадлежащих окружности заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, ординаты которых на 1 единицу больше абсциссы. Сколько существует таких точек?

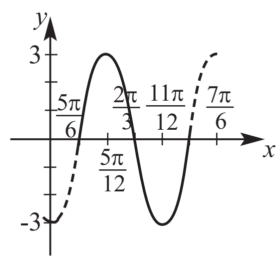
46. В арифметической прогрессии $a_1 + a_2 + a_3 = 30$, $a_1^2 + a_2^2 = 16$. Зная, что член a_5 делится на 13 без остатка, найдите a_1.

47. Сколько существует пятизначных чисел, которые читаются одинаково слево на право и справо на лево (например, как 67876)?

48. В пирамиде TABCD TO-высота, ABCD-прямоугольник и
AB = 12,
AD = 16,
$TO = 5\sqrt{2}$
Найдите $\angle$ TAO.



49. Запишите формулу графика на рисунке как при помощи функции синуса, так и при помощи функции косинуса.



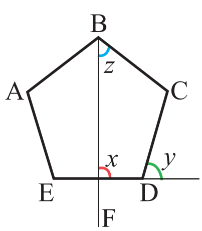
50. Постройте график функции $y = 2\sin 3x + 3$ по 5 точкам. При помощи этого графика постройте график функции $y = 2\sin 3(x - \frac{\pi}{3}) + 3$.

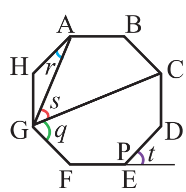
51. Найдите углы правильных многоугольников на рисунке.

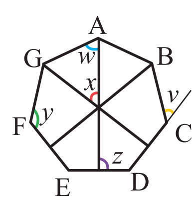
а) BF ось симметрии правильного пятиугольника.

б) GC ось симметрии правильного восьмиугольника.

в) три оси симметрии правильного семиугольника.







52. Длина окружности колеса автомобиля равна 50 см. Какое расстояние пройдёт автомобиль, если колесо сделает: а) 5 оборотов;б) 500 оборотов?

Обобщающие задания

53. При остывании воды в чашке, ожидается изменение температуры от 100º до комнатной (20º). В результате наблюдения установлено, что температура изменяется от времени в экспоненциальной зависимости, снижаясь за каждые 5 минут на 25%.

а) Смоделируйте зависимость температуры от времени в виде $y = ab^x + c$.

б) Через сколько минут температура станет равна комнатной температуре?

54. При извержении вулкана в углях сгоревших деревьев осталось 45% Углерода 14. Сколько лет назад произошло извержение вулкана?

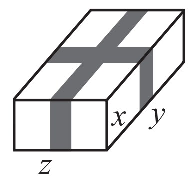
55. Определите новые координаты, при:

а) повороте точки с координатами (5;3) относительно начала координат на угол 90° в направлении против часовой стрелки.

б) повороте точки с координатами (4;2) относительно начала координат на угол 180° в направлении по часовой стрелке.

в) отображении точки с координатами (3;2) относительно оси y, с последующим поворота на $\frac{3}{4}$ части полного (360º) оборота.

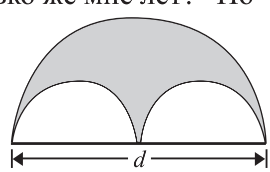
г) перемещении вправо на 3 шага точки с координатами (2;3), с последующим поворотом на угол 90°в направлении против часовой стрелки.



56. Найдите длину ленты, которой обклеена коробка на рисунке, если $x = 3$ см, $y = 8$ см, $z = 5$ см.

57. Гасан спросил у бабушки, сколько ей лет. Бабушка сказала: “Я пошла в школу в 5 лет и четвёртую часть жизни посвятила учению, после чего начала работать, и это составило половину моей жизни. Сейчас, уже как 15 лет, присматриваю за внуками. Вот и посчитай, сколько же мне лет?” Посчитайте сколько лет бабушке Гасана.

58. На рисунке изображены три полуокружности. Зная, что d = 18 см, найдите площадь закрашенной части.



59. Следующая информация показывает количество осадков, выпавших в течении месяца (с точностью до 0,1 мм). Представьте информацию в виде диаграммы “ствол-листья”: а) с шагом равным 1; б) с шагом, равным 0,5.

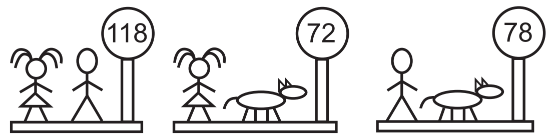
1.3, 2.0, 2.3, 3.2, 3.4, 1.8, 3.1, 2.3, 1.9, 2.6,
1.6, 0.0, 2.4, 3.1, 0. 6, 0.7, 0.3, 0.0, 2.2, 1.5,
3.6, 2.3 1.8, 2.7, 3.0, 2.9, 1.2, 2.2, 1.4, 3.3

60. Выполните преобразования.

1) 2 см^3 → мм^3	2) 0,003 см^3 → мм^3
3) 3,4 м^3 → см^3	4) 0,015 м^3 → см^3
5) 550000 мм^3 → см^3	6) 1200000 см^3 → м^3
7) 0,5м^3 → л	8) 53000 мл → л

Обобщающие задания

61. Весы показывают массу мальчика, девочки и барана. По рисунку установите сколько килограмм весит каждый из них ?

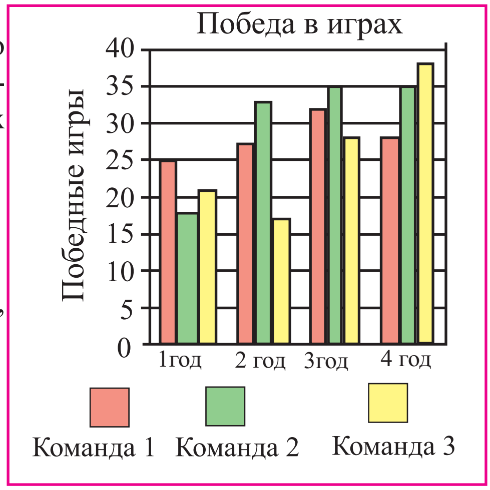


62. Барграф отражает информацию о победных играх трёх команд за последнии 5 лет. Какие из следующих утверждений верные?

а) Команда -3 всегда на втором месте. б) Команда -1 имеет самые высокие результаты.

в) Комнада -1 выиграла игр больше, чем Команда - 3.

г) Команда - 2 каждый следующий год выигрывала больше игр, чем в предыдущий.



63. Рашад член клуба в стрельбе по мишеням. Его результаты показывают, что 80% сделанных им выстрелов попадают в цель.

а) Найдите вероятность, что следующий выстрел Рашада попадёт в цель.

б) Найдите вероятность, что Рашад попадёт в цель,стреляя 3 раза подряд.

в) Найдите вероятность, что при первом выстеле Рашада попадёт в цель, а при втором - нет.

64. Таблица частот показывает иформацию о годе выпуска и объёме (в куб. см) двигателя 600 автомобилей, которые находятся на стоянке.

		Объём двигателя			
		0 – 1000	1001 – 1500	1501 – 2000	2001 +
Год выпуска	меньше 3 лет	50	80	160	20
	больше 3 лет	60	100	120	10

а) Какова вероятность, что год выпуска случайным образом выбранного атомобиля меньше 3 лет?

б) Если результаты таблицы являются выборкой из 5400 автомобилей, то на сколько точно можно дать прогноз для атомобилей, объём двигателя которых более 2000 и год выпуска составляет более 3 лет?

65. Найдите высоту бака, в форме прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 50 см и 80 см, а вместимость составляет 400 л.

Ответы

Функции

с. 9-11 №9 0 №10 а) 1; б) –1 №11 0 №12 б) 0; –0,75; –2 №13 г) $D(f) = (-3; 2]$, $E(f) = (-5; 5]$ №14 $b = -3$ №15 $c = 2$ №16 4 №17 а) A(2;0), B(0;–1) №19 а) $E(f) = [2; 7]$ №20 $f(-2) = 3; f(6) = -1$ № 21 а) $f(-1) = 5, f(0) = 4, f(1)=3$

с. 13 №2 б) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; в) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; д) $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$
№3 в) $D(f) = (-\infty; 3]$; д) $D(f) = [0; 2) \cup (2; +\infty)$; ж) $D(f) = [-1; 1]$; з) $D(f) = [1; 3) \cup (3; +\infty)$; и) $D(f) = [-4; 4) \cup (4; +\infty)$

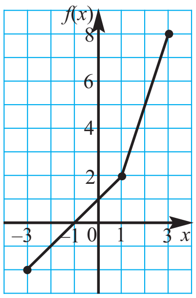
№4 б) $D(g) = (-\infty; +\infty)$, $E(g) = (-\infty; 6]$; г) $D(\varphi) = (-\infty; +\infty)$, $E(\varphi) = [3; +\infty)$; д) $D(u) = [-3; 3]$, $E(u) = [0; 3]$; е) $D(v) = [-1; 3]$, $E(v) = [0; 2]$
№5 а) $D(f) = [0; 1) \cup (1; 2]$; б) $D(f) = (-\infty; 0] \cup (1; 2]$; в) $D(f) = (1; 2]$
№6 НМЗ = 2, $E(f) = [2; +\infty)$ №7 б) $y = 6 - x$, $0 \le x \le 5$, $1 \le y \le 6$

с. 16-17 №1 б) $x_1 = 0, x_2 = 3$; в) $x = 4$; г) $x = 2$ №5 2) а) [–2; 3]; б) –2 və 2; в) (–2; 2); г) (2; 3]; д) [–2; 0]↑, [0; 3]↓; е) $x_{max} = 0$, $y_{max} = 4$; ж) [–5; 4]
№6 а) $f(2) < f(0) < f(-4)$; в) $f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{3}) < f(-2)$ №11 а) НМЗ = 2

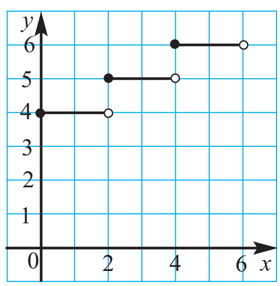
с. 19 №1 а) *нечетн*; в) *четн*; г) *ни нечет. ни чет.* №4 в) 6; г) 4 №7 б) $f(5) < f(7)$ №8 (–4; 4)

с. 21 №1 а) 0; б) 5; в) –7; г) 41 №2 а) 4; в) 0; д) 2

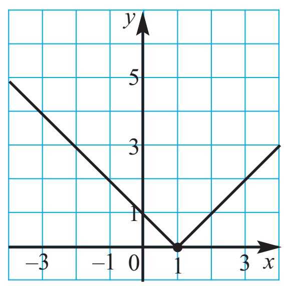
№3 а)



б)



в)

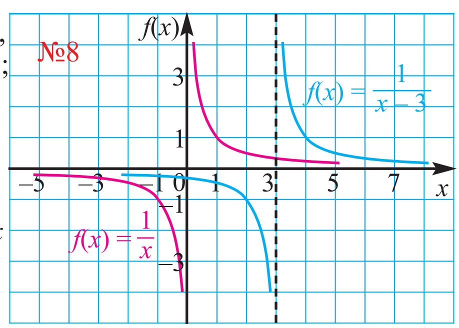


с. 22 №2 а) *да*; б) *нет* №4 а) $f(0,1) > g(0,1)$; б) $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$; в) $f(2) < g(2)$

с. 24 №2 в) $y = x^3$ №4 $y = \frac{4}{x}$ №5 а) $h = \sqrt{9 - d^2}$; б) D = [0; 3], E = [0; 3]

с. 25-31 №1 а) $m = 0$, $n = 4$ г) $m = 7$; $n = -3$ №2 б) $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, *парабола* $y = x^2$ *переносится на 2 ед.направо, 1 ед вниз.*
№5 1) б) $g(x) = (x + 3)^2 - 3$; 2) б) $g(x) = f(x - 4) - 8$

№7 а) $y = |x + 4| - 2$, $m = -4$, $n = -2$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-2; +\infty)$; б) $y = (x - 6)^2 + 4$, $m = 6$, $n = 4$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [4; +\infty)$



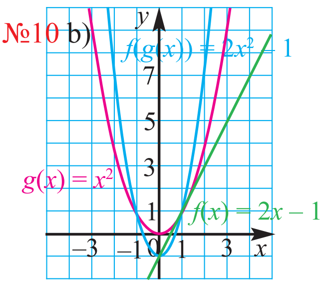
№10 а) *переносится на 2 ед.направо*
№13 б) *график* $y = \sqrt{x}$ *отражается относительно оси x и переносится на 1 ед. вверх*

№26 а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = 2\sqrt{x}$

с. 33 №1 $(f+g)(1)=1$, $(f-g)(2)=3$, $(f\cdot g)(6)=-20$ №2 б) $(f+g)(x)=(x+1)^2$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$; $(f-g)(x)=x^2-1$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[-1;+\infty)$ $(f\cdot g)(x)=x\cdot(x+1)^2$, $D=(-\infty;+\infty)$, $E=[-\infty;+\infty)$
$(\frac{f}{g})(x)=x$, $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$, $E=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

с. 35-36 №3 а) 1; в) 2; г) 0 №4 а) 4; б) 50; е) –48
№7 а) (–2; 2); б) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$;
№12 б) $f(x)=x^2-1$; г) x^2+x+1
№13 б) $f(-1)=-1$, $f(2)=5$, $f(3)=7$, $f(0)=1$, $f(x)=2x+1$ №15 б) [–2; 6]; с) [–3; 1]

№10 b)



с. 39-40 №5 а) $f^{-1}(9)=-3$, $f^{-1}(7)=1$, $f^{-1}(2)=6$
№6 а) $y=\frac{1}{4}x$; в) $y=\frac{x+14}{3}$; и) $y=\frac{4x-24}{3}$
№12 а) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$; г) $f^{-1}(x)=-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ №14 ≈ 45 см

с. 41-42 №3 а) $y=\sqrt[3]{x+1}$ №6 1) а) *четн.*; б) *нечетн.* №7 $f(2)=10$ №10 б) –1 и 7
№11 а) 3; в) 11; е) 3; ж) 7 №13 а) $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; б) (2; 5)

Точка прямая плоскость в пронстранстве

с. 45-47 №5 б) 1; 4 или бесконечно №10 а) 8 см; б) $\frac{a+b}{2}$ №11 6 см №12 6 см
с. 48 №3 а) 6 см; б) 4,5 см; в) $\frac{bc}{a+c}$
с. 51 №3 $x=6$ №4 а) $8\sqrt{3}$; б) 4 №5 6 см №7 $d=5\sqrt{2}$, $\varphi=45°$ №9 $a\sqrt{6}$ №10 45°
с. 53 №2 5 см №3 12 см №4 $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см №5 3 см
с. 55-58 №2 а) да; б) нет №3 $a\sqrt{2}$ №4 2,4 см №5 90° №6 8 см №8 $\sqrt{a^2+b^2}$
№16 17 см №18 а) 17 см; б) 9 см ; в) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
с. 61-62 №7 6 см №8 15 см, 6 см, 8 см №9 12 см №10 2 м №12 18 см или 22 см
с. 64 №2 $9\sqrt{3}$ см² №3 $4\sqrt{2}$ см №4 $48\sqrt{3}$ см² №5 а) $\frac{3}{8}a^2$; б) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$
с. 65 №2 7,2 м №4 $2\sqrt{3}$ см №5 13 см или 15 см №6 б) $\frac{a}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Тригонометрические функции угла

с. 68-71 №1 в) III четв. №5 а) 4 рад. №7 б) $\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}09$ рад. №8 в) –67,5° №12 2) $\frac{5\pi}{4}$
с. 72-73 №3 1,2 рад. №6 а) 250 рад. №8 а) 192 π м²; б) 16 π = 2880°
№9 а) 3π рад./мин; б) 45 π м/мин №10 ≈153 м №14 0,5 рад. ≈ 28,5°
№16 ≈ 245 оборот №18 0,75 оборот №20 ≈ 86°
с. 82 №5 а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\sqrt{3}$ №6 а) 0,42; б) –0,91 №7 а) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$ №8 а) 0; б) 1; в) 1 №9 B(–1,53; 1,29)
с. 85 №5 а) 1,5; б) 1; г) 0,5 №6 б) 2 №7 а) $2\sqrt{3}$ №9 б) НБЗ =2, НМЗ=0
№10 б) НБЗ = 2, НМЗ = 1 №13 2 точки; $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$ №15 $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$

Ответы

с. 88-89 №3 б) $-\sin\alpha$; е) $-\cos\alpha$ №6 б) $-\frac{1}{2}$; г) $-\sqrt{3}$ №9 а) $-\sin\alpha$ №10 б) $\cos^2\alpha$
№11 а) $-\sin 10°$ №14 б) 1; г) 0 №15 а) $2\cdot\cos\alpha$; б) 0

с. 91-92 №1 е) $\operatorname{cosec}^2\alpha$; з) 1 №2 $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$ №5 а) $\operatorname{tg}^2\alpha$; б) 2
г) $\frac{2}{\sin\alpha}$; д) $\frac{1}{2}$ №6 а) 5; б) $\frac{1}{9}$ №7 а) $2\cos\alpha$; б) $-2\cos\alpha$ №10 $1\frac{9}{16}$
№11 а) 20; б) -16 №12 $-0{,}32$ №15 а) $\cos^2\alpha$ №17 а) НБЗ = 3, НМЗ = -4

с. 95-96 №2 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №4 б) $\frac{1}{2}$ №5 б) 1 №6 а) 1 №7 а) $\frac{1}{2}$; б) -1 №8 а) 0 №11 а) $\sqrt{3}$; б) 1
№12 5 №13 а) 1 №14 а) $2-\sqrt{3}$ №15 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №16 а) 1 №17 а) 1 №18 а) -3; б) 3
№19 $\sin\varphi = \frac{16}{65}$, $\varphi \approx 14{,}3°$ №20 а) $\operatorname{tg}\theta = 0{,}75$ $\theta \approx 37°$

с. 97-101 №2 а) 0 №4 а) $\operatorname{tg}5\alpha$; б) $-\operatorname{tg}4\alpha$ №7 а) $\frac{1}{4}$ №10 а) $\frac{1}{2}$ №11 б) 0
№12 а) $-\sin 4x\cdot\cos 10x$; б) $-\sin 3x\cdot\sin x$ №13 а) $2\operatorname{ctg}\alpha$; в) 2 №14 б) 0,28
№16 а) 2 №17 а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ №23 а) $\frac{240}{289}$ №29 $\approx 0{,}46$ кв.ед

с. 102-103 №1 1) $-\cos 2x$; 3) 1 №3 5) $\frac{1+\sin\alpha}{2}$ №5 б) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ №6 б) 1
№8 в) НБЗ = $\sqrt{2}$, НМЗ = $-\sqrt{2}$ №9 $\frac{2}{\cos\alpha}$ №10 а) -1; б) 1 №11 $\frac{1}{4}$

с. 104-105 №5 а) a б) $-a$ №6 а) 1 №11 1 №14 3 №17 а) 1 №20 а) 3 б) 0,5

Теоремы синусов и косинусов

с. 109-113 №1 а) $b=12$; б) $a \approx 8{,}92$; в) $\angle B = 45°$; г) $\angle A \approx 44°$ №3 а) $\theta = 30°$; б) $\theta = 60°$
№4 а) $\angle A \approx 36°$, $a \approx 14{,}72$, $c \approx 23{,}5$ №5 2) *одно решение*; 6) *не имеет реш;*
9) *имеет 2 решения* №7 в) $\approx 34{,}71$ №8 а) $\approx 41{,}6°$ или $\approx 138{,}4°$ №11 а) $20{,}26°$
№12 1) $\approx 16{,}06$ м² №14 а) $30\sqrt{3}$ №16 а) $25<BC<50$ №17 ≈ 4139 м
№18 $\theta\approx 38{,}5°$ или $\theta\approx 21{,}5°$ №19 $\approx 47{,}9$ м №21 $\varphi\approx 92°$ №22 $\approx 41{,}5°$

с. 116-118 №2 BC = 7; $\angle B \approx 81{,}6°$; $\angle C \approx 38{,}4°$ №4 1) $\approx 17{,}4$ №5 а) $\frac{12}{5}\sqrt{6}$ м;
б) 11,2 см; в) $4\sqrt{7}$; $\sqrt{73}$; $\sqrt{145}$ №7 а) $d_1 = 2\sqrt{13}$, $d_2 = 2\sqrt{37}$ №8 в) $\approx 68°$
№11 б) $\approx 42{,}5$ км №13 ≈ 111 м

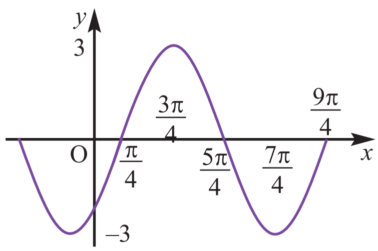
с. 119-120 №2 а) ≈ 3 км; б) $\approx 8{,}3$ км и $\approx 8{,}9$ км №3 $\approx 12{,}2$ м №6 ≈ 191 м
№7 $\approx 15{,}5$ км и $\approx 42{,}4$ км №9 $\approx 85{,}5°$ №11 б) $\approx 1{,}5$ мин

Тригонометрические функции

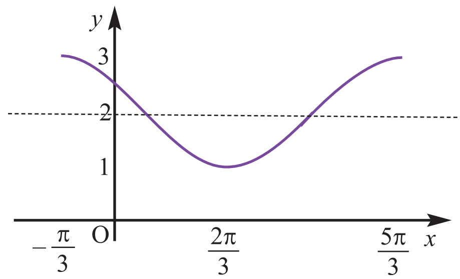
с. 129-135 №1 а) $y = 4\sin x$; б) $y = \frac{1}{3}\sin x$; в) $y = \sin\frac{1}{2}x$ №6 а) A = 4, T = 6π;
г) A = $\frac{1}{2}$, T = 2 №7 1) а) $y = \frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}$; б) $y = 4\cdot\sin 2x$; в) $y = 2\sin x$
№8 а) $y = 12\sin\frac{1}{4}x$; в) $y = -0{,}8\sin\pi x$ №9 а) $y = 9\cos\frac{1}{4}x$ №10 а) T = 12π;
в) T = 30π №11 A = 0,5; T = $\frac{2}{5}$ №14 б) 75 №17 а) $y_{\max} = 8$, $y_{\min} = 2$,
$E(y) = [2; 8]$ №19 а) $y = 4\sin 2(x - \frac{\pi}{4}) - 6$; б) $y = 0{,}5\sin\frac{2}{3}(x + \frac{\pi}{3}) + 2$

Ответы

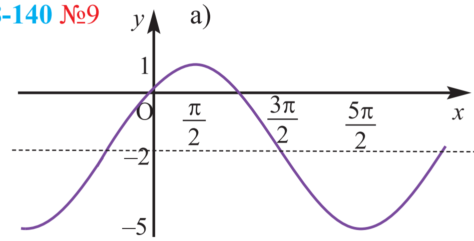
№20 а)



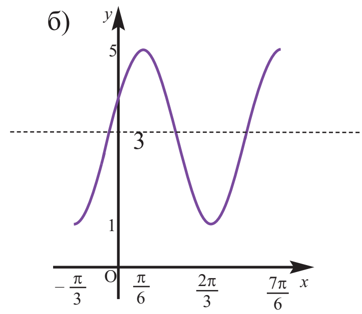
б)



с. 138-140 №9 а)



б)



№10 а) $y=3\sin 2x$; в) $y=5\sin\frac{1}{2}x$; г) $y=-4\cos x$ №12 $y=2\cos(x-\frac{2\pi}{3})$

с. 142-143 №1 $y=1{,}2-16\cos\frac{\pi}{6}(t-1)$ №2 а) T=0,8 сек. б) 75 №3 а) $y=10-8\cos\frac{\pi t}{30}$; б) 18 м №5 б) $H=36-18\cos\frac{10\pi t}{3}$; в) 72 см; г) 170 м/мин.

с. 145-149 №1 а) –1 б) 1 №4 б) $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$, $\theta=120°$ в) $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$, $\theta=300°$ №15 а) $h=3\cdot\operatorname{tg}\alpha$ №16 а) $d=5\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi t}{30}$ в) $d\approx 8{,}7$ м

с. 152-154 №1 б) $-\frac{\pi}{3}$ г) $\frac{3\pi}{4}$ е) $\frac{3\pi}{4}$ №7 а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $-\sqrt{3}$ е) –1 №10 а) $\frac{4}{5}$ в) $\frac{24}{25}$ д) $\frac{63}{65}$ №11 а) $x=4\operatorname{cosec}\theta$; б) ≈ 9° №12 θ ≈ 41° №15 а) $-\frac{\pi}{6}$ б) $\frac{2\pi}{3}$

с. 155-156 №1 а) B($\frac{\pi}{6}$; 2), C($\frac{\pi}{3}$; 2), D($\frac{\pi}{2}$; 2), E($\frac{2\pi}{3}$; 2), F($\frac{5\pi}{6}$; 2) №3 1) A=6, T=3π №5 в) $y=5+2\cos 2x$ №7 $y=12-10\cos\frac{\pi t}{50}$ №8 $y=6{,}1-5{,}8\sin\frac{\pi}{6}(t-1)$

Многогранники

с. 161-162 №5 грань C №6 AC = 5, AC' = 13 №7 9 см

с. 163-165 №12 а) 26; б) 29 №13 $d_1=13$ см, $d_2=9$ см №14 $d_1=a\sqrt{2}$, $d_2=2a$

с. 168-170 №2 б) 160 м^2 №5 188 см^2 №7 224 см^2, $18\sqrt{3}+180\approx 211{,}2$ см^2 №11 а) $S_0=22$ м^2; б) $S_{бок.}=90$ м^2; в) $S_{полн.}=134$ м^2 №12 г) $S_{бок.}=480$, $S_{полн.}=536$

с. 172-173 №5 200 см^2 №6 а) $S_{бок}=6$ см^2 №7 140 см^2 №8 36 см^2 №10 5 см

с. 176-179 №1 12 см №2 9 см №3 1680 см^2, 96 см^2, 728 см^2 №7 а) 13 см и 15 см №9 52 см^2 №10 180 см^2 №11 ≈ 182,6 см^2 №15 в) 288 см^2 №16 36 см^2 №17 а) 4 №19 $72\sqrt{3}$ см^2 №21 $h_a=6$ см, $h=3\sqrt{3}$ см

Ответы

с. 180-182 №4 а) 14 см^2 №6 $S_1 = 25$ см^2, $S_2 = 100$ см^2, $S_3 = 225$ см^2 №7 11 см
№11 360 см^2 №12 330 см^2 №13 12544 см^2 №14 а)3740 см^2; б) ≈407 см
с. 183 №1 88; 85; $360 + 64\sqrt{3}$; 22 №2 г) a=8см, h=3см, h_a= 5см

Тригонометрические уравнения

с. 186-192 №2 а)2) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in Z)$ №3 а) $2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$
№5 б) 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in Z)$ №6 2) а) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$
№8 г)1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in Z)$ №9 б) 1) $\frac{3\pi}{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$ $(k \in Z)$
№10 а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ №13 в) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$
№15 е) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$ №16 б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in Z)$; г) $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$ №17 б) 240°
№18 а) 0°; 90°; 180° №21 б) 60°; 120°; 240°; 300° №22 *имеет 6 корней*

с. 196-199 №2 б) πk $(k \in Z)$ в) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ №3 в) $\pi + 2\pi k$ $(k \in Z)$ №4 а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in Z)$
№5 а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in Z)$; №6 б) $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ №7 б) $\frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$
в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, (k \in Z)$; м) $\pi k, (k \in Z)$ №9 14) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$
№10 1) а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}$ в) $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ №15 б)75° №16 $\theta \approx 26°$ №20 $t \approx 0{,}4$ сек
№21 а) $h(t) = 1{,}5 + 2\cos\frac{\pi t}{12}$ б)≈0,1м в) t=6 сек
с. 204-206 №1 а) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ в) $(0;\pi)$ №2 а) $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ №3 а) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$
№4 б) $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ №5в) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ №6 б) $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ №8в) $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
№12 б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le t \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $(k \in Z)$; №13 б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le t \le \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$; $(k \in Z)$;
№14 а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2} \le x \le \frac{7\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$; $(k \in Z)$; №15 б) $-\pi + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

с. 208-209 №4 г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, (k \in Z)$ №5 б) 20м, 24м г) ≈44 сек №8 б) при $60 < x < 300$

Объемы простанственных фигур

с. 213-218 №5 225 см^3; 120 м^3 №8 а)99 тонн; №10 б) V= 144 №11 875 см^3 №12 314,4кг
№15 а) 2 см; б) $8\sqrt{3}$ см^3 №17 60см^3 №18 а) V = 6 см^3 б) на 60 см^3
№19 840м^3 №20 288 см^3 №21 а) V = 12 дм^3 №22 24м^3 №24 а) $160\sqrt{3}$
№25 375м^3 №27 48 см^3 №28 1680 см^3 №33 б)18 см^3
с. 219-221 №1 б) 4,4 м^3; 159,3 м^3 №3 15:7 №4 2880 мм^3 №5 96 см^3 №15 32 дм^3
с. 224-225 №2 а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{6}{7}$ №4 а) 25:9 б) 125:27 №6 а) V_1=43 см^3
№7 а) S_2 = 175 см^2 №9 63 см^3 №17 12 m^2
с. 227 №1 $S_{бок}$=468 см^2; $S_{п.п}$=680 см^2; V=1072 см^3 №4 216 куб ед.
№5 б) $V_{пирамиды.}$=12 ; $V_{параллелепипед}$= 72 ; $V_1 : V_2 = 1 : 6$
с. 232 №2 а) 5 см b) 420 см^3 №3 1: 125 №4 272 см^2 №9 90 см^3, 141 см^2

Показательная и логарифмическая функция

с. 235-236 №5 д) 2; е) 5; и) 256 №10 а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{5}$; в) 2 №11 г) $a^{0,75}$ №14 б) 8; з) 8
с. 239-240 №7 а) $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^x$ б) $y = 3 \cdot 5^x$ №12 в) 3 №13 б) при знач. меньше 3-х.

с. 244-245 №6 б) $y = \frac{5}{3} \cdot 3^x$ №10 б) ≈ 1587 манат
№11 а) $D(f) = (-\infty;+\infty)$; $E(f) = (2; +\infty)$; е) $D(f) = (-\infty;+\infty)$; $E(f) = (-1; +\infty)$

с. 249 №7 в) 6; г) 25; е) 9 №8 а) 2; б) $\frac{49}{3}$ в) 36 №9 а) $\frac{1}{2}$; б) 16 №10 ≈7,84 миллиярд

с. 251 №5 а) возр.; б) убыв. №6 б) $\log_{\frac{1}{2}}5 < \log_{\frac{1}{2}}3$ в) $\log_2 3 > \log_5 4$ №7 $k=16$

с. 252-253 №2 а) ≈ 36 dB б) *не верно* №3 а) 7,1 б) в 5 раз №6 4,6 год, 11,7 год

с. 255-257 №3 а) $\log_2 15$ б) $\log_3 8$ ж) $\log_3 800$ №5 а) $\log_2\frac{x+3}{2}$; $(x>3)$

№6 а) $a+b$; г) $a+b+1$ №8 1) а) 27; b) 49 2) а) $5x^2$ №11 2) в) 4; г) 4 з) -4

с. 259-260 №1 г) -1; 3 з) 2 №2 14) 10; 15) -3;5 №3 а) 0; 2 д) 1;2 №4 б) 1; в) 1,5;

№6 а) 27 №7 д) 4+lg7; №8 3) -1,4; 9) 1,5 №9 а) $r \approx 0{,}042$ б) ≈ 35,4 мин

№10 б) πk, $(k \in Z)$, в) 5;7 г) -2;2

с. 262-264 №1 б) 32 д) 2 №2 б) 6; ж) 9; и) $=\varnothing$ h) 4 №3 а) 4; б) 3 №4 а) 81; $\frac{1}{3}$
№5 а) $\frac{1}{2}$;8 №7 г) 3; е) $\varnothing$; з) $\frac{1}{3}$; 9 №8 2) 10 №9 2 №15 3,2балл №18 б) 9,8

266 №1 м) $(-\infty; -3) \cup (3;+\infty)$; р) $(-2; 4)$ №2 б) $x<9$; в) $x<2$ №3 б) $x>2$
№4 а) $x \geq -1$ №5 а) $(-3; 3)$ в) $[-2;-1) \cup [2;+\infty)$ г) $(2; 3) \cup (7;+\infty)$
№7 1) $x > \log_8 21$ №8 1) $(-\infty; -2] \cup [5;+\infty)$ 3) $(0;\ln 2)$

с. 268-269 №1 а) $(-1; 2)$ б) $(6;+\infty)$ ж) $(3;+\infty)$ №2 5) $[-\frac{1}{4}; +\infty)$; 8) $(-5;3]$

№3 4) $(0; 2)$ 8) $(-1;0) \cup (2;3)$ 12) $(2; 32)$ №5 б) ≈5,9 гр №6 в) 2; з) 1

№7 в) $[\frac{1}{4}; 8]$ и) $(\frac{1}{3}; 9)$ к) $(-9; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 9)$ №9 в) ≈15,4 год

с. 270-271 №3 ≈10,3 час №6 ≈50 год №8 $\frac{4}{15}$ №11 $y=3^{1-x}$ №12 а) 1000 раз №16 г) 3

Комплексные числа

с. 275 №1 а) 1 в) i №3 а) $x = 0{,}5$; $y = 2{,}5$ №5 ж) $2+6i$ з) 25

№6 б) $(y+3i)(y-3i)$; в) $(2x+i)(2x-i)$ №7 а) $\frac{6}{5}$ №8 а) $\pm 2i$ в) $\pm 4i$ №9 б) $1-i$

с. 279 №3 а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; в) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ №4 b) $1+i$

№5 а) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

с. 281 №2 а) 2^{12}; б) $2^{19} \cdot i$ №5 а) $\frac{i}{2}$; б) -32 №8 а) $12i$

с. 283 №1 б) ± 2; $\pm 2i$ №4 б) 2; $-1+\sqrt{3}\,i$; $-1-\sqrt{3}\,i$;

Информация прогноз

с. 300 №1 а) 6 б) 8 г) $k-1$ №7 а) ${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$ №10 а) 8; б) 5-ый член;70

с. 304 №2 а) $\frac{5}{32}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{5}{32}$; г) $\frac{1}{32}$; д) $\frac{5}{16}$ №3 $\frac{80}{243}$ №8 $\frac{8}{81}$

с. 307-313 №5 $b_n=3^n+1$ №9 b) 4 №11 а) $(-\infty;-1) \cup (-1; +\infty)$ b) $(-\infty;-2) \cup [1; +\infty)$

№15 в) $[-3;-1]$ №22 20 №24 $(2+1)^6=3^6=729$ №28 6 №29 12см^2
№30 а) $(-\infty; +\infty)$ б) $[6; +\infty)$ №31 $\frac{3}{4}$ №33 $m=-1$ №42 48

Литература

1. Cəbr. Dərslik. 9-cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b. Çaşıoğlu, 2014.
2. Cəbr və analizin başlanğıcı. Dərslik. 10-cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b. . Çaşıoğlu, 2011.
3. Həndəsə. Dərslik. 9-cu sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b Çaşıoğlu, 2011.
4. Həndəsə. Dərslik. 10-cu sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b. Çaşıoğlu, 2011.
5. Həndəsə. Dərslik. 11-ci sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b. Çaşıoğlu, 2011.
6. A problem solving approach to Mathematics. Rick Billstein,... Pearson, 2013.
7. Algebra 1. Edward B. Burger,... Harcourt Publishing Company, 2010.
8. Algebra 2. James E.Schulltz,... Harcourt Education Company, 2004.
9. Pre-Algebra, McDougal Littell. Houghton Mifflin Company, 2005.
10. Discovering Advanced Algebra An Investigative Approach. Grades 10–12. Jerald Murdock,... Key Curriculum Press. 2010.
11. College and Apprenticeship mathematics. Pearson Education Canada Inc., 2003.
12. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. А.В.Погорелов, Просвещение, 1999.

http://www.classzone.com

http://www.nctm.org

https://www.engageny.org/content/precalculus-and-advanced-topics

https://www.edonline.sk.ca/webapps/moe-curriculum-BBLEARN/index.jsp

http://math.kendallhunt.com/x5273.html

https://www.khanacademy.org/math

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 10

Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə
Dərslik
(Rus dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	**Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
	Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
	İlham Heydər oğlu Hüseynov
Elmi məsləhətçi	**Çingiz Qacar**
Elmi redaktor	**İbrahim Məhərov**
Tərcüməçi	**Viktoriya Abdullayeva**
Korrektor	**Tərlan Qəhrəmanova**
Bədii tərtibat	**Leyla Bəşirova**
Kompüter tərtibatı	**Mustafa Qəhrəmanov**
	Rəşad Musayev

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2017-090

Kağız formatı: 70×100 1\16 , Fiziki ç.v. 20.

Ofset kağızı. Times New Roman şrifti

Səhifə sayı 320. Tiraj 1050. Pulsuz.

Bakı 2018

Radius nəşriyyatı

Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sənə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sənə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, sən də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsan ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşın ondan sənin kimi rahat istifadə edə bilsin. Sənə təhsildə uğurlar arzulayırıq!